「基礎科学のための数学的手法」第 9 版

付録 B に追加

B. 4 逆行列

A が $n \times n$ の正方行列のとき，

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

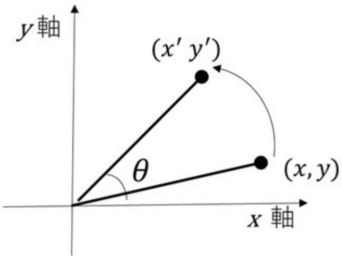
となる行列 A^{-1} を A の逆行列という． 右辺の行列は単位行列 $\mathcal{E}$ である. このとき $A^{-1}A = \mathcal{E}$ が成り立つ. 逆行列が存在するためには，A の行列式 $\det A$ が 0 でないこと $\det A \neq 0$ が必要である（行列式については付録 C 参照）． 逆行列をもつ正方行列を正則行列とよぶ. 例えば，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列は $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ である。この逆行列が存在するためには，$ad - bc \neq 0$ が必要である.

B. 5 回転行列

2 次元平面内の点 (x, y) を、原点を中心に反時計回りに角 θ だけ回転させると，回転後の座標 (x', y') は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる. この行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を（2 次元）回転行列とよぶ.



[問題 B.1] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき，次の量を計算せよ.

（1） Ax，Bx

（2） AB，BA （$AB \neq BA$ に注意）

（3） AC （CA は定義されない）

（4） $A + B$，$B - A$

[問題 B.2] 二つの回転行列 $R(\alpha)$, $R(\beta)$ の積 $R(\alpha)R(\beta)$ を計算し， この量が何を意味するかを説明せよ.

[問題 B.3] ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に，$R(\alpha)^2$ を掛けたときと $2R(\alpha)$ を掛けたときの違いを説明せよ.

[問題 B.4] 問題 5. 3（1）（50 頁）は，行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ と表せる. A の逆行列を求め， その逆行列を方程式の両辺に左から掛けることによって方程式を解け.

問 題 略 解

[問題 B.1]

(1)　$Ax = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$,　　$Bx = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \end{pmatrix}$

(2)　$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$　　$BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$

(3)　$AC = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$

(4)　$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$　　$B - A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

[問題 B.2] $R(\alpha)R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ ．角 β と角 α の回転を続けて行うことに対応している.

[問題 B.3] $R(\alpha)^2$ は角 2α の回転を表し，$2R(\alpha)$ は角 α の回転をしたのちに座標（ベクトル）を 2 倍することを表す.

[問題 B.4] $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ である．$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を計算して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ を得る.