

## 「基礎科学のための数学的手法」追加問題・注

● 33 ページ

[問題] オイラーの公式を用いて三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

を証明せよ.

[答]  $e^{i(\alpha \pm \beta)} = \cos(\alpha \pm \beta) + i \sin(\alpha \pm \beta)$ . 一方  $e^{i(\alpha \pm \beta)} = e^{i\alpha} e^{\pm i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta \pm i \sin \beta) = (\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta)$ .

● 40 ページ

[問題]  $0 \leq x \leq 1$  において定義された関数  $\phi(x)$  が

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} = \epsilon\phi$$

( $\epsilon \geq 0$ ) を満たすものとする.

(1) 一般解を求めよ.

(2)  $\phi(x)$  (恒等的にはゼロではないとする) が境界条件  $\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$  を満たすとすると,  $\epsilon$  の値が特定の値に限られることを示し, その値の一般的な形を求めよ. (このような関数を演算子  $-\frac{d^2}{dx^2}$  の固有関数,  $\epsilon$  をその固有値という.)

(3) 固有関数に含まれる任意定数を,  $\int_0^1 |\phi(x)|^2 dx = 1$  が満たされるように決定せよ. (これを固有関数の規格化という.)

(4) (2) で求めた固有値の中で, もっとも小さいものおよび二番目に小さいものに対する規格化された固有関数について,  $|\phi(x)|^2$  を図示せよ.

[答]

(1)  $\phi(x) = C_1 \sin(\sqrt{\epsilon}x) + C_2 \cos(\sqrt{\epsilon}x)$ .

(2)  $\epsilon = n^2\pi^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

(3)  $\phi_n(x) = \pm\sqrt{2} \sin(n\pi x)$ .

(4) 略.

● 68 ページ

[注] 任意の連続関数  $f(x)$  に対して,  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$  (積分領域は  $a$  を含む任意の領域) という性質をもつ  $\delta$  関数,  $\delta(x)$ , を定義すると, (6.42) 式は

$$I_G = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{M}{2\pi R} r^3 \delta(r-R) dr$$

と表すことができる.  $\delta$  関数は, 例えば  $\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x}$  の様な関数であり, 超関数の一つである.  $\delta(x) = 0$  ( $x \neq 0$ ),  $\delta(x) = \infty$  ( $x = 0$ ),  $\int_{-\infty}^\infty \delta(x)dx = 1$ ,  $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$  などの性質をもつ.