第 1 章

問題［1.1］ 次の微分方程式の一般解を求め、次に適当に積分定数を決めて、与えられた初期条件を満たす解を求めよ。

(1) $\dfrac{dx}{dt} = -10, \quad t = 0$ のとき $x = 0$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -10, \quad t = 0$ のとき $x = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 2$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x}, \quad t = 2$ のとき $x = 3$

(4) $\dfrac{dN}{dt} = -3N, \quad t = 0$ のとき $N = 10$

(5) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0, \quad x = 2$ のとき $y = 1$

(6) $\dfrac{d^2z}{dt^2} = -9.8 - 0.1\dfrac{dz}{dt}, \quad t = 0$ のとき $z = 10,\ \dfrac{dz}{dt} = 0$

(7) $x\dfrac{dy}{dx} - xy = y, \quad x = 1$ のとき $y = 1$

解　答

(1)

$$dx = -10dt$$

両辺を積分すると、一般解は

$$x = -10t + C$$

初期条件より積分定数 C は

$$x(0) = C = 0 \qquad \therefore C = 0$$

以上より解は

$$x = -10t$$

(2) $v = dx/dt$ とおくと方程式は

$$\frac{dv}{dt} = -10$$

と表せる。これを解くと

$$\begin{aligned} dv &= -10dt \\ v &= -10t + C_1 \end{aligned}$$

v を dx/dt に戻すと、方程式の一般解は

$$\begin{aligned} dx &= (-10t + C_2)dt \\ x &= -5t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

となる。また、初期条件より積分定数 C_1, C_2 は

$$v(0) = C_1 = 2 \qquad \therefore C_1 = 2$$
$$x(0) = C_2 = 0 \qquad \therefore C_2 = 0$$

以上より解は

$$x = -5t^2 + 2t$$

(3)

$$xdx = tdt$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}t^2 + C$$

一般解は

$$x = \sqrt{t^2 + C'} \qquad (C' = 2C)$$

初期条件より積分定数 C' は

$$x(2) = \sqrt{4 + C'} = 3 \qquad \therefore C' = 5$$

以上より解は

$$x = \sqrt{t^2 + 5}$$

(4)

$$\frac{1}{N}dN = -3dt$$

$$\ln N = -3t + C$$

一般解は

$$N = e^{-3t+C}$$

$C' = e^C$ とおいて、初期条件より積分定数 C' は

$$N(0) = C' = 10 \qquad \therefore C' = 10$$

以上より解は

$$N = 10e^{-3t}$$

(5)

$$\frac{1}{y^2}dy = -2xdx$$

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$$

一般解は

$$y = \frac{1}{x^2 + C'} \qquad (C' = -C)$$

初期条件より、積分定数 C' は

$$y(2) = \frac{1}{4 + C'} = 1 \qquad \therefore C' = -3$$

以上より解は

$$y = \frac{1}{x^2 - 3}$$

(6) $dz/dt = v$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -9.8 - 0.1v \\ \frac{1}{98+v}dv &= -0.1dt \\ \ln(98+v) &= -0.1t + C_1 \end{aligned}$$

v の一般解は

$$v = e^{-0.1t+C_1} - 98$$

$v = dz/dt$ より、方程式の一般解は

$$\begin{aligned} dz &= (e^{-0.1t+C_1} - 98)dt \\ z &= -10e^{-0.1t+C_1} - 98t + C_2 \end{aligned}$$

となる。また、$C_1' = e^{C_1}$ とおくと、初期条件より積分定数 C_1, C_2 は

$$\begin{aligned} v(0) = C_1' - 98 = 0 \qquad & \therefore C_1' = 98 \\ z(0) = -980 + C_2 = 10 \qquad & \therefore C_2 = 990 \end{aligned}$$

以上より方程式の解は

$$z = 990 - 98t - 980e^{-0.1t}$$

(7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}dy &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \\ \ln y &= x + \ln x + C \end{aligned}$$

一般解は

$$y = xe^{x+C}$$

初期条件より積分定数 C は

$$y(1) = e^{1+C} = 1 \qquad \therefore C = -1$$

以上より解は

$$y = xe^{x-1}$$

問題［**1.2**］ 図の CR 回路のスイッチを $t = 0$ に閉じる。時刻 t におけるコンデンサー上の電荷を q とすると、q は微分方程式

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$

を満たす。$t = 0$ において $q = 0$ であったとして、q の時間依存性を求めて、図示せよ。また、$t = \infty$ において $q = CV$ となることを確かめよ。

解　答

$$
\begin{aligned}
\frac{dq}{dt} &= \frac{V}{R} - \frac{q}{RC} \\
dq &= -\frac{1}{RC}(q - CV)dt \\
\ln(q - CV) &= -\frac{t}{RC} + A \qquad \text{（}A\text{ は積分定数）}
\end{aligned}
$$

一般解は

$$q = e^{-t/RC+A} + CV$$

$t = 0$ で $q = 0$ なので、$A' = e^A$ とおくと、積分定数 A' は

$$q(0) = A' + CV = 0 \qquad \therefore A' = -CV$$

以上より方程式の解は

$$q = CV(1 - e^{-t/RC})$$

となる。q の時間依存性を図 1 に示す。図より $t = \infty$ において $q = CV$ となることが確かめられる。

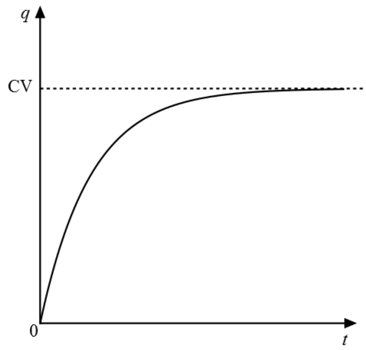

Fig. 1: q の時間依存性

問題［1.3］ 光速 c に近い速度 v をもつ電子の運動量 p は

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

で与えられる。ここで m_0 は静止質量である。電子に一定の力 F がはたらくと速度は、微分方程式

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = F$$

に従って変化する。$t = 0$ において $v = v_0 (< c)$ として、v を時間の関数として求め、$t = \infty$ の極限で v が c に近づくことを示せ。

解　答

方程式を p について解くと、$p = Ft + A$。ここで A は積分定数である。また、$t = 0$ で $v = v_0$ より積分定数 A の値は

$$A = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}$$

となる。方程式に $p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ を代入、両辺を二乗して

$$\begin{aligned}
m_0^2 v^2 &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(Ft + A)^2 \\
v^2 \left(m_0^2 + \frac{(Ft + A)^2}{c^2}\right) &= (Ft + A)^2 \\
v^2 &= \frac{(Ft + A)^2}{\frac{(Ft+A)^2}{c^2}\left\{\left(\frac{m_0 c}{Ft+A}\right)^2 + 1\right\}} \\
v^2 &= \frac{c^2}{\left(\frac{m_0 c}{Ft+A}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

以上より v は

$$v = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{Ft+A}\right)^2 + 1}} \qquad \left(A = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}}}\right)$$

$t = \infty$ の極限では $\left(\frac{m_0 c}{Ft+A}\right)^2 \ll 1$ なので $v \approx c$ である。

問題［1.4］ テキスト p.2 式 (1.2) において空気抵抗が速度の 2 乗に比例する場合（慣性抵抗）を考えよう。自由落下の場合の運動方程式は

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + \gamma' \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

と書くことができる。

(1) $t = 0$ において $z = h, dz/dt = 0$ としてこの微分方程式を解き、任意の時刻における dz/dt および z を求めよ。また、それらの量の時間依存性を図示せよ。

(2) 終端速度を γ', m, g を用いて表せ。

(3) ニュートンの法則によれば、密度 ρ' の空気の中を運動する半径 r の球状物体の場合、$\gamma' = (\pi/4)r^2\rho'$ である。雨滴を半径 $r = 0.500$ mm の球とし、水の密度を $\rho = 1.00$ g/cm^3、空気の密度を $\rho' = 0.00129$ g/cm^3 として終端速度を求めよ。ただし、$g = 980$ cm/s^2 とする。

解　答

(1) $dz/dt = v$ とおくと、方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -mg + \gamma' v^2 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\gamma'}{m}\left(v^2 - \frac{mg}{\gamma'}\right) \\ \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} + v\right)\left(\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} - v\right)} dv &= -\frac{\gamma'}{m} dt \end{aligned}$$

と変形できる。$A = \sqrt{\frac{mg}{\gamma'}}$ とおいて、左辺を $\frac{1}{(A+v)(A-v)} = \frac{X}{A+v} + \frac{Y}{A-v}$ として部分分数分解すると、 $X = Y = \frac{1}{2A}$ なので、v は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v}\right) dv &= -\frac{2A\gamma'}{m} dt \\ \ln(A+v) - \ln(A-v) &= -\frac{2A\gamma'}{m} t + C_1 \\ \frac{A+v}{A-v} &= e^{-\frac{2A\gamma'}{m} t + C_1} \\ v(1 + e^{-\frac{2A\gamma'}{m} t + C_1}) &= -A(1 - e^{-\frac{2A\gamma'}{m} t + C_1}) \\ v &= -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} \frac{(1 - e^{-2\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}}\right)t + C_1})}{(1 + e^{-2\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}}\right)t + C_1})} \end{aligned}$$

$t = 0$ で $v = 0$ より積分定数 C_1 は

$$v(0) = -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} \frac{(1 - e^{C_1})}{(1 + e^{C_1})} = 0 \qquad \therefore C_1 = 0$$

となる。また、右辺の分母、分子に $e^{\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t}$ を掛けて

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} \left(\frac{e^{\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t} - e^{-\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t}}{e^{\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t} + e^{-\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t}}\right) \\ &= -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t\right) \end{aligned}$$

$v = dz/dt$ より

$$dz = -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t\right) dt$$

$x = \sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t$ として変数変換すると、$dt = \sqrt{\frac{m}{\gamma' g}} dx$ なので、$\int \tanh x dx = \log\cosh x$ より両辺を積分して

$$z = -\frac{m}{\gamma'} \log\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t\right)\right] + C_2$$

$t = 0$ で $z = h$ なので $\cosh 0 = 1$ より、$z(0) = C_2 = h$。以上より z は

$$z = h - \frac{m}{\gamma'} \log\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{\gamma' g}{m}} t\right)\right]$$

v の時間依存性を図 2 に、z の時間依存性を図 3 に示す。

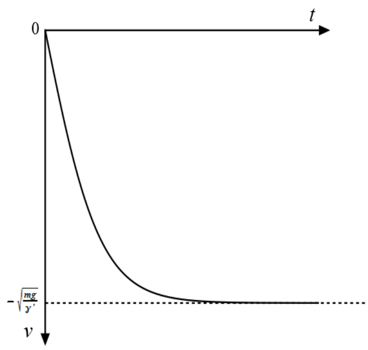

Fig. 2: v の時間依存性

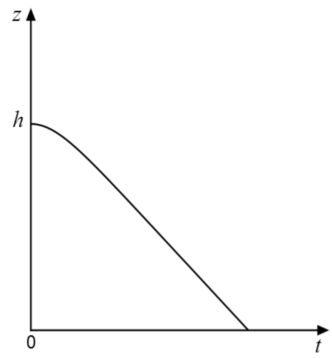

Fig. 3: z の時間依存性

(2) $t \to \infty$ としたときの終端速度 v は、$\tanh t \to 1$ より

$$v = -\sqrt{\frac{mg}{\gamma'}}$$

(3) $r = 0.500 \times 10^{-1}$ cm より γ' は

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{3.14}{4} \times (0.500 \times 10^{-1}\ \mathrm{cm})^2 \times 0.00129\ \mathrm{g/cm^3} \\ &= 2.53 \times 10^{-6}\ \mathrm{g/cm} \end{aligned}$$

また、雨滴の重さ m は

$$m = \rho V = 1.00\ \mathrm{g/cm^3} \times \frac{4}{3} \times 3.14 \times (0.500 \times 10^{-1}\ \mathrm{cm})^3 = 5.24 \times 10^{-4}\ \mathrm{g}$$

よって終端速度は

$$\begin{aligned} v &= -\sqrt{\frac{5.24 \times 10^{-4}\ \mathrm{g} \times 980\ \mathrm{cm/s^2}}{2.53 \times 10^{-6}\ \mathrm{g/cm}}} \\ &= -450\ \mathrm{cm/s} \end{aligned}$$

問題［**1.5**］ テキスト p.5 解 (1.11) から落下距離と時間の関係を求めよ。テキスト p.4 近似式 (1.9) を用いて、抵抗が無視できる極限では落下距離は $gt^2/2$ となることを示せ。

解　　答

落下距離 $h - z$ を t で表すと、式 (1.11) より

$$h - z = \frac{mg}{\gamma} t - \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}\right)$$

抵抗を無視できる $(\gamma \to 0)$ とすると、近似式 (1.9) より

$$\begin{aligned} h - z &= \frac{mg}{\gamma}t - \frac{m^2 g}{\gamma^2}\left(1 - 1 + \frac{\gamma}{m}t - \frac{\gamma^2}{2m^2}t^2\right) \\ &= \frac{mg}{\gamma}t - \frac{mg}{\gamma}t + \frac{gt^2}{2} \\ \therefore h - z &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

問題［**1.6**］ 次の方程式の一般解を求めよ。ただし、$y' = dy/dt$、$y'' = d^2y/dt^2$。

(1) $y'' - y' - 2y = 0$

(2) $2y'' + y' - y = 0$

(3) $y'' - 4y = 0$

(4) $y'' - y' - 6y = -5$

解　　答

(1) $y = e^{\lambda t}$ とすると

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \qquad \therefore \lambda = 2, -1$$

よって、一般解は

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$

(2) $y = e^{\lambda t}$ とすると

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \qquad (2\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \qquad \therefore \lambda = \frac{1}{2}, -1$$

よって、一般解は

$$y(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-t}$$

(3) $y = e^{\lambda t}$ とすると

$$\lambda^2 - 4 = 0 \qquad (\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0 \qquad \therefore \lambda = \pm 2$$

よって、一般解は

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

(4) $y = e^{\lambda t}$ とすると、方程式の同次形 $y'' - y' - 6y = 0$ は

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \qquad (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0 \qquad \therefore \lambda = 3, -2$$

よって、同次形の一般解は

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$$

また、特解として $\tilde{y} = 5/6$ を考えると、方程式の一般解は次の式で与えられる。

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} + \frac{5}{6}$$

問題［**1.7**］ 次の微分方程式の一般解、および与えられた条件を満たす解を求めよ。

(1) $y'' + 3y' + 2y = 0$　　　$t = 0$ のとき $y = 1, y' = 0$

(2) $y'' + 5y' + 4y = 0$　　$t = 0$ のとき $y = 0, t = 1$ のとき $y = 1$

解　　答

(1) $y = e^{\lambda t}$ とすると

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \qquad \therefore \lambda = -1, -2$$

よって、一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

条件より積分定数 C_1, C_2 の値は、次の連立方程式を解くと

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

$C_1 = 2, C_2 = -1$。以上より条件を満たす解は

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

(2) $y = e^{\lambda t}$ とすると

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \qquad (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0 \qquad \therefore \lambda = -1, -4$$

よって、一般解は

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$$

条件より、積分定数 C_1, C_2 の値は、次の連立方程式を解いて

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 & ① \\ y(1) = C_1 e^{-1} + C_2 e^{-4} = 1 & ② \end{cases}$$

式①より $C_1 = -C_2$。これを式②に代入して

$$C_1(e^{-1} - e^{-4}) = 1, \qquad \therefore C_1 = \frac{e^4}{e^3 - 1}, C_2 = -\frac{e^4}{e^3 - 1}$$

以上より条件を満たす解は

$$y(t) = \frac{e^4}{e^3 - 1}(e^{-t} - e^{-4t})$$

第 2 章

[問題 2.1] 次の関数について, $\mathrm{grad} f$ を求めよ.

(1) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (2) $f(x, y) = x\sin y + y\cos x$

(3) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

解答：

(1) $\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ なので

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ も同様に

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

よって

$$\mathrm{grad} f = -\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots (答)$$

(2)$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ なので

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{sin}y + y\mathrm{cos}x) = \mathrm{sin}y - y\mathrm{sin}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\mathrm{sin}y + y\mathrm{cos}x) = x\mathrm{cos}y + \mathrm{cos}x$$

よって

$$\mathrm{grad} f = (\mathrm{sin}y - y\mathrm{sin}x)\,\boldsymbol{i} + (x\mathrm{cos}y + \mathrm{cos}x)\,\boldsymbol{j} \cdots (答)$$

(3)$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\frac{\partial e^{-(x^2+y^2)}}{\partial x} \\
&= 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot(-2x)e^{-(x^2+y^2)} = 2x\{1-(x^2+y^2)\}e^{-(x^2+y^2)} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}e^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\frac{\partial e^{-(x^2+y^2)}}{\partial y} \\
&= 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)\cdot(-2y)e^{-(x^2+y^2)} = 2y\{1-(x^2+y^2)\}e^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{grad} f = 2\{1-(x^2+y^2)\}e^{-(x^2+y^2)}\,(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) \cdots (答)$$

[問題 2.2] 次の関数について $\mathrm{grad} f$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
(1) f(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
(2) f(x,y,z) &= x\mathrm{sin}y + \mathrm{z}\mathrm{cos}xy + \frac{x}{y}(1+z^2) \\
(3) f(x,y,z) &= x\mathrm{sin}y\mathrm{cos}z
\end{aligned}$$

解答：

(1)$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ であるから

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ と $\frac{\partial f}{\partial z}$ も同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{grad}f = -\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdots(\text{答})$$

(2)$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin y + z\cos xy + \frac{x}{y}(1+z^2)\right) = \sin y - zy\sin xy + \frac{1}{y}(1+z^2)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin y + z\cos xy + \frac{x}{y}(1+z^2)\right) = x\cos y - xz\sin xy - \frac{x}{y^2}(1+z^2)\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x\sin y + z\cos xy + \frac{x}{y}(1+z^2)\right) = \cos xy + \frac{x}{y}\cdot(2z)\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}f = &\left(\sin y - zy\sin xy + \frac{1}{y}(1+z^2)\right)\boldsymbol{i} + \left(x\cos y - xz\sin xy - \frac{x}{y^2}(1+z^2)\right)\boldsymbol{j}\\ &+\left(\cos xy + 2\frac{xz}{y}\right)\boldsymbol{k}\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3)$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x\sin y\cos z) = \sin y\cos z\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x\sin y\cos z) = x\cos y\cos z\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x\sin y\cos z) = -x\sin y\sin z\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{grad}f = (\sin y\cos z)\boldsymbol{i} + (x\cos y\cos z)\boldsymbol{j} - (x\sin y\sin z)\boldsymbol{k}\cdots(\text{答})$$

[問題 2.3](1)$f(x,y) = x^2-y^2+2xy$ の (1,0) における $-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ 方向の傾きを求めよ。また, (1,0) における最大の傾きの方向の単位ベクトルを求めよ.

(2)$\phi(x,y,z) = xy^2+yz$ の (1,1,2) における$\boldsymbol{i}$+$\boldsymbol{j}$+$\boldsymbol{k}$方向の傾きを求めよ.

解答：

(1) まず, $\mathrm{grad}f$ を求める.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2+2xy) = 2x+2y.\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2+2xy) = -2y+2x.\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{grad}\,f = (2x+2y)\boldsymbol{i} + (-2y+2x)\boldsymbol{j}.$$

$x=1,\ y=0$ において $\mathrm{grad}\,f = 2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$.
$-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ の単位ベクトルは $(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})/\sqrt{5}$.
傾きは勾配と単位ベクトルの内積であらわすことができる. よって

$$(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\frac{1}{\sqrt{5}} = ((2\cdot(-1))+2\cdot 2)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdots(\text{答})$$

$(1,0)$ における最大の傾きの方向の単位ベクトルは

$$\frac{\mathrm{grad}\,f}{|\mathrm{grad}\,f|} = \frac{2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}\cdots(\text{答})$$

(2) まず $\mathrm{grad}\phi$ を求める.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2+yz) = y^2\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(xy^2+yz) = 2xy+z\\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xy^2+yz) = y
\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{grad}\phi = y^2\boldsymbol{i}+(2xy+z)\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$.
点 (1,1,2) において, $\mathrm{grad}\phi = \boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.
次に $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ の単位ベクトルは $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})/\sqrt{3}$.
最後に勾配と単位ベクトルの内積をとれば傾きが出る. よって

$$(\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\frac{1}{\sqrt{3}} = (1+4+1)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\cdots(\text{答})$$

[問題 2.4]$U = U(S,V,N)$ が 1 次の同次関数である. すなわち

$$U(\lambda S,\lambda V,\lambda N) = \lambda U(S,V,N)$$

を満たすとき

$$U = S\frac{\partial U}{\partial S} + V\frac{\partial U}{\partial V} + N\frac{\partial U}{\partial N}$$

であることを示せ (これがオイラーの関係式).

解答：
$U(\lambda S,\lambda V,\lambda N) = \lambda U(S,V,N)$ の両辺をλで微分すれば

$$\frac{d}{d\lambda}U(\lambda S,\lambda V,\lambda N) = \left(S\frac{\partial}{\partial(\lambda S)} + V\frac{\partial}{\partial(\lambda V)} + N\frac{\partial}{\partial(\lambda N)}\right)U(\lambda S,\lambda V,\lambda N) = U(S,V,N)$$

ここで $\lambda = 1$ を代入すると

$$\left(S\frac{\partial}{\partial S} + V\frac{\partial}{\partial V} + N\frac{\partial}{\partial N}\right)U(S,V,N) = S\frac{\partial U}{\partial S} + V\frac{\partial U}{\partial V} + N\frac{\partial U}{\partial N} = U(S,V,N)\cdots(\text{答})$$

[問題 2.5]$U = A(S^3/NV)$ (A は定数) について$\partial U/\partial S, \partial U/\partial V, \partial U/\partial N$ を求めよ.また, これらの偏導関数がオイラーの関係式を満たすことを確かめよ.

解答：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(A\frac{S^3}{NV}\right) = 3A\frac{S^2}{NV} \cdots (\text{答}) \\
\frac{\partial U}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial V}\left(A\frac{S^3}{NV}\right) = -A\frac{S^3}{NV^2} \cdots (\text{答}) \\
\frac{\partial U}{\partial N} &= \frac{\partial}{\partial N}\left(A\frac{S^3}{NV}\right) = -A\frac{S^3}{N^2V} \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

次にオイラーの関係式のチェック.

$$
\begin{aligned}
S\frac{\partial U}{\partial S} + V\frac{\partial U}{\partial V} + N\frac{\partial U}{\partial N} &= S\left(3A\frac{S^2}{NV}\right) + V\left(-A\frac{S^3}{NV^2}\right) + N\left(-A\frac{S^3}{N^2V}\right) \\
&= 3A\frac{S^3}{NV} - A\frac{S^3}{NV} - A\frac{S^3}{NV} = A\frac{S^3}{NV} = U
\end{aligned}
$$

オイラーの関係式は成り立っている $\cdots$(答)

[問題 2.6]$P = RT/(v-b) - a/v^2$について$\partial P/\partial v$ を求めよ.

解答：

$$
\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{RT}{v-b}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a}{v^2}\right) = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \cdots (\text{答})
$$

[問題 2.7] $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$のとき, $\partial x/\partial r$, $\partial x/\partial\theta$, $\partial y/\partial r$, $\partial y/\partial\theta$, を計算し,

$$
\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \equiv \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} = r
$$

であることを示せ.

解答：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta \\
\frac{\partial x}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) = \sin\theta \\
\frac{\partial y}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) = r\cos\theta
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r} = (\cos\theta)(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)(\sin\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \cdots (\text{答})
$$

[問題 2.8]$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ のとき

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \equiv \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\phi} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\phi} = r^2\sin\theta$$

であることを示せ.

解答：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\cos\phi) = \sin\theta\cos\phi \\
\frac{\partial x}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\cos\phi) = r\cos\theta\cos\phi \\
\frac{\partial x}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}(r\sin\theta\cos\phi) = -r\sin\theta\sin\phi \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta\sin\phi) = \sin\theta\sin\phi \\
\frac{\partial y}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta\sin\phi) = r\cos\theta\sin\phi \\
\frac{\partial y}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}(r\sin\theta\sin\phi) = r\sin\theta\cos\phi \\
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) = \cos\theta \\
\frac{\partial z}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) = -r\sin\theta \\
\frac{\partial z}{\partial\phi} &= \frac{\partial}{\partial\phi}(r\cos\theta) = 0
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial\phi} + \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial\phi} \\
= & (\sin\theta\cos\phi)(r\cos\theta\sin\phi)0 + (r\cos\theta\cos\phi)(r\sin\theta\cos\phi)(\cos\theta) \\
& +(-r\sin\theta\sin\phi)(\sin\theta\sin\phi)(-r\sin\theta) - (-r\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta\sin\phi)(\cos\theta) \\
& -(\sin\theta\cos\phi)(r\sin\theta\cos\phi)(-r\sin\theta) - (r\cos\theta\cos\phi)(\sin\theta\sin\phi)0 \\
= & r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\
= & r^2\sin\theta(\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^2\theta\cos^2\phi) \\
= & r^2\sin\theta(\cos^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi)) \\
= & r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2\sin\theta \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

[問題 2.9]$f(x)$ が微分可能であり，df/dx も微分可能であるとき，$f(x - vt)$ は波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

を満たすことを示せ.

解答：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x-vt)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial x} = \frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)} \\
\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)}\right) = \frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial(x-vt)^2} \\
\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v\frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)} \\
\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)}\right) = v^2\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial(x-vt)^2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdots(\text{答})$$

[問題 2.10]$\psi(\boldsymbol{r}) = \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ は方程式

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = k^2\psi(\boldsymbol{r})$$

を満たすことを示せ. ただし

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

また

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

は、ラプラシアン と呼ばれる演算子である.

解答：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x} &= \frac{\partial\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{\partial x} = \frac{\partial\cos(k_x x + k_y y + k_z z)}{\partial x} \\
&= -k_x\sin(k_x x + k_y y + k_z z) \\
\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-k_x\sin(k_x x + k_y y + k_z z)\right) \\
&= -k_x^2\cos(k_x x + k_y y + k_z z)
\end{aligned}
$$

$\partial^2\psi(\boldsymbol{r})/\partial y^2$ と $\partial^2\psi(\boldsymbol{r})/\partial z^2$ も同様に

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial y^2} &= -k_y^2\cos(k_x x + k_y y + k_z z) \\
\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{r})}{\partial z^2} &= -k_z^2\cos(k_x x + k_y y + k_z z)
\end{aligned}
$$

よって

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\cos(k_x x + k_y y + k_z z) = -k^2\psi(\boldsymbol{r})$$

$$\therefore -\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = k^2\psi(\boldsymbol{r})\cdots(\text{答})$$

[問題 2.11]ポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{r})$ 中を運動する質量 m の質点の位置ベクトルが$\boldsymbol{r}$であるとき

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + V(\boldsymbol{r})\right] = 0$$

であることを示せ.

解答：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 + V(\boldsymbol{r})\right] \\
=& \left(m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) + \left(m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + \left(m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) \\
=& \left(m\frac{d^2x}{dt^2} - F_x\right)\frac{dx}{dt} + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - F_y\right)\frac{dy}{dt} + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - F_z\right)\frac{dz}{dt} = 0 \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

[問題 2.12]$f(x, y, z)$ が

$$f(x, y, z) = \text{一定}$$

であるとき

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{f,z} = \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}}$$

であることを示せ.

解答：

$f(x, y, z) =$ 一定，の両辺を z 一定で x で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,f} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,f} &= 0 \\
\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,f} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\
\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z,f} &= \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}} \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

[問題 2.13]$U = U(S, V, N)$ について

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}, P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}, \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$$

を定義する. このとき, 次の関係が成り立つことを示せ.

$$(1) dU = TdS - PdV + \mu dN$$

$$(2) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,N}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,N}$$

解答：

(1) U の全微分は

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N} dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} dN$$

ここで $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}$, $P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}$, $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$ なので, これらを代入して

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \cdots (答)$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} &= \left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}\right]_{S,N} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\\ -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N} &= -\left[\frac{\partial}{\partial S}\left(-\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}\right]_{V,N} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}$ であることから $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N} \cdots$(答)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,V} &= \left[\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}\right]_{S,V} = \frac{\partial^2 U}{\partial N \partial S}\\ \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,N} &= \left[\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}\right]_{V,N} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial N}\end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial N \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial N}$ であることから $\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,N} \cdots$(答)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S,V} &= \left[\frac{\partial}{\partial N}\left(-\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N}\right]_{S,V} = -\frac{\partial^2 U}{\partial N \partial V}\\ -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,N} &= \left[\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}\right]_{S,N} = -\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial N}\end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 U}{\partial N \partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial N}$ であることから $\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{V,N} \cdots$(答)

[問題 2.14] 次の微分形式の中で, ある関数の全微分になっているものを示し, その関数を求めよ.

(1)$xdx + ydy$　　(2)$y^2dx + x^2dy$

(3)$xy^2dx + yx^2dy$　(4)$\sin y dx + x\cos y dy$

解答：

$g(x,y)dx + h(x,y)dy$ が何らかの関数の全微分である必要十分条件は,

$$\frac{\partial g(x,y)}{dy} = \frac{\partial h(x,y)}{dx}$$

だったのでこれが成り立っていればいい.

(1) U 全体の微分は

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$\partial x/\partial y = \partial y/\partial x$ なので全微分になっている $\cdots$(答)
もとの関数 f は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \tag{0.1}$$

となるような関数. それぞれを積分すると

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2,\ \int y dy = \frac{1}{2}y^2$$

$\int xdx \neq \int ydy$ であるが、f が多項式であると考えると, これらを足し合わせた値 $f = x^2/2+y^2/2$ が考えられる.
この f は式 (0.1) を満たす$\cdots$(答)

(2)

$$\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x$$

$\partial(y^2)/\partial y \neq \partial(x^2)/\partial x$ なので全微分ではない$\cdots$(答)

(3)

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy,\ \frac{\partial(yx^2)}{\partial x} = 2xy$$

$\partial(xy^2)/\partial y = \partial(yx^2)/\partial x$ なので全微分になっている$\cdots$(答)
もとの関数 f は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2,\ \frac{\partial f}{\partial y} = yx^2$$

の両方を満たす関数.
それぞれを積分すると

$$\int xy^2 dx = \frac{1}{2}x^2y^2,\ \int yx^2 dy = \frac{1}{2}x^2y^2$$

よって

$$f = \frac{1}{2}x^2y^2 \cdots (答)$$

(4)

$$\frac{\partial(\sin y)}{\partial y} = \cos y,\ \frac{\partial\,(x\cos y)}{\partial x} = \cos y.$$

$\partial(\sin y)/\partial y = \partial(x\cos y)/\partial x$ なので全微分になっている$\cdots$(答)
もとの関数 f は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y$$

を満たす関数.
それぞれを積分すると

$$\int \sin y dx = x\sin y,\ \int x\cos y dy = x\sin y$$

よって

$$f = x\sin y \cdots (答)$$

[問題 2.15]$U = U(S, V)$ の全微分は $T = \partial U/\partial S$, $P = -\partial U/\partial V$ を用いて $dU = TdS - PdV$ で与えられる.(T, V) の関数 F, (T, P) の関数 G を, $F(T, V) = U - TS$, $G(T, P) = U - TS + PV$ により定義するとき, 次の関係を示せ.

$$dF = -SdT - PdT,\ dG = -SdT + VdP$$

解答：

$$\begin{aligned} dF &= d(U - TS) = dU - d(TS) = (TdS - PdV) - (SdT + TdS) \\ &= -SdT - PdV \cdots (\text{答}) \\ dG &= d(U - TS + PV) = dU - d(TS) + d(PV) \\ &= TdS - PdV - (SdT + TdS) + (VdP + PdV) = -SdT + VdP \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

[問題 2.16]ある物理量 A が X, Y の関数として,$A = kX^2Y$(k は定数) と言う関係にあることが知られてるとする.X, Y を観測したときの誤差がそれぞれΔX, ΔY であったとき,A の相対誤差はどの程度と考えられるか.

解答：

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{A} &= \frac{k(X + \Delta X)^2 (Y + \Delta Y) - kX^2Y}{kX^2Y} \\ &= \frac{k\left(X^2 + 2X\Delta X + (\Delta X)^2\right)(Y + \Delta Y) - kX^2Y}{kX^2Y} \\ &= \frac{k\left(X^2Y + 2XY\Delta X + Y(\Delta X)^2 + X^2\Delta Y + 2X\Delta X\Delta Y + (\Delta X)^2\Delta Y\right)}{kX^2Y} \\ &= \frac{2XY\Delta X + Y(\Delta X)^2 + X^2\Delta Y + 2X\Delta X\Delta Y + (\Delta X)^2\Delta Y}{X^2Y} \end{aligned}$$

ここで ΔX とΔY がとても小さいとすると

$$\frac{2\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y} \cdots (\text{答})$$

[問題 2.17]$x^2 + y^2 = 1$ のとき $x + y$ の最大値,最小値を求めよ.

解答：
ラグランジェの未定係数法を使う.
$F(x, y, \lambda) = (x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ とおく.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{0.3}$$

式 (0.1) より $x = -1/(2\lambda)$, 式 (0.2) より,$y = -1/(2\lambda)$.
これらを式 (0.3) に代入して $1/(2\lambda^2) - 1 = 0$.
よって $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$.
つまり,$\lambda = 1/\sqrt{2}$ のとき, $x = y = -1/\sqrt{2}$.
$\lambda = -1/\sqrt{2}$のとき, $x = y = 1/\sqrt{2}$.
ゆえに $x + y$ の最大値は $x = y = 1/\sqrt{2}$のとき,$\sqrt{2} \cdots$ (答)
最小値は $x = y = -1/\sqrt{2}$のとき, $-\sqrt{2} \cdots$ (答)

[問題 2.18]条件 $y = 1 - x^2$のもとで $x + y,\ x^2 + y^2$の最大値, 最小値を求めよ.

解答：
ラグランジュの未定係数法を用いる.
$F(x, y, \lambda) = (x + y) + \lambda(x^2 + y - 1)$ とおく.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \tag{0.1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda = 0 \tag{0.2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y - 1 = 0 \tag{0.3}$$

式 (0.2) より$\lambda = -1$.
これを式 (0.1) に代入して

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 0 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

この値を式 (0.3) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + y - 1 &= 0 \\ y &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって最大値は $x = 1/2,\ y = 3/4$ のとき, $x + y = 5/4 \cdots$ (答)

$F(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2) + \lambda(x^2 + y - 1)$ とおいて偏微分をすると

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \tag{0.1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \tag{0.2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y - 1 = 0 \tag{0.3}$$

式 (0.1) より $2x(1 + \lambda) = 0$. よって $x = 0,\ \lambda = -1$.
$x = 0$ のとき式 (0.3) より,$y = 1$. この値を (0.2) に代入して, $\lambda = -2$.
$\lambda = -1$ のとき式 (0.2) より, $y = -1/2$. この値を式 (0.3) に代入して, $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
よって最大値は $x = 0,\ y = 1$ のとき $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ (答)
最小値は $x = \pm 1/\sqrt{2},\ y = 1/2$ のとき $x^2 + y^2 = 3/4 \cdots$ (答)

[問題 2.19]$U_1+U_2=U$(一定), $V_1+V_2=V$(一定) のとき $S=S_1(U_1,V_1)+S_2(U_2,V_2)$ を最大にする条件は

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2},\ \frac{P_1}{T_1}=\frac{P_1}{T_2}$$

であることを示せ. ただし

$$\frac{1}{T_i}=\frac{\partial S_i(U_i,V_i)}{\partial U_i},\ \frac{P_i}{T_i}=\frac{\partial S_i(U_i,V_i)}{\partial V_i}$$

解答：
ラグランジュの未定係数法を用いる.
$F(U_1,U_2,V_1,V_2,\alpha,\beta)=S_1(U_1,V_1)+S_2(U_2,V_2)-\alpha(U_1+U_2-U)-\beta(V_1+V_2-V)$ とおく.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial U_1} &= \frac{\partial S_1(U_1,V_1)}{\partial U_1}+\frac{\partial S_2(U_2,V_2)}{\partial U_1}-\frac{\partial(\alpha(U_1+U_2-U))}{\partial U_1}-\frac{\partial(\beta(V_1+V_2-V))}{\partial U_1}\\
&= \frac{1}{T_1}-\alpha=0\\
\frac{\partial F}{\partial U_2} &= \frac{\partial S_1(U_1,V_1)}{\partial U_2}+\frac{\partial S_2(U_2,V_2)}{\partial U_2}-\frac{\partial(\alpha(U_1+U_2-U))}{\partial U_2}-\frac{\partial(\beta(V_1+V_2-V))}{\partial U_2}\\
&= \frac{1}{T_2}-\alpha=0
\end{aligned}$$

よって

$$\alpha=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{T_2}\cdots(答)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial V_1} &= \frac{\partial S_1(U_1,V_1)}{\partial V_1}+\frac{\partial S_2(U_2,V_2)}{\partial V_1}-\frac{\partial(\alpha(U_1+U_2-U))}{\partial V_1}-\frac{\partial(\beta(V_1+V_2-V))}{\partial V_1}\\
&= \frac{P_1}{T_1}-\beta=0\\
\frac{\partial F}{\partial V_2} &= \frac{\partial S_1(U_1,V_1)}{\partial V_2}+\frac{\partial S_2(U_2,V_2)}{\partial V_2}-\frac{\partial(\alpha(U_1+U_2-U))}{\partial V_2}-\frac{\partial(\beta(V_1+V_2-V))}{\partial V_2}\\
&= \frac{P_2}{T_2}-\beta=0
\end{aligned}$$

よって

$$\beta=\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}\cdots(答)$$

[問題 2.20]三つの変数 $n_1,\ n_2,\ n_3$が次の二つの条件を満たすとする.

$$n_1+n_2+n_3=N(一定)$$
$$E_1n_1+E_2n_2+E_3n_3=E(一定)$$

$E_1,\ E_2,\ E_3$は定数である.このとき

$$W(n_1,n_2,n_3)=N\ln N-n_1\ln n_1-n_2\ln n_2-n_3\ln n_3$$

を最大にする $n_1,\ n_2,\ n_3$ が次式で与えられることを示せ.

$$n_i=e^{-(1+\alpha)}e^{-\beta E_i}$$

ただし, α, β はラグランジュの未定係数法で

$$e^{-(1+\alpha)} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{3} e^{-\beta E_i}}, \quad \frac{E}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{3} E_i e^{-\beta E_i}}{\sum_{i=1}^{3} e^{-\beta E_i}}$$

で与えられる.

解答：
$F(n_1, n_2, n_3, \alpha, \beta) = N\ln N - n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2 - n_3 \ln n_3 - \alpha(n_1+n_2+n_3-N) - \beta(E_1+E_2+E_3-E)$ とする.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial n_1} &= -\frac{\partial(n_1 \ln n_1)}{\partial n_1} - \alpha - \beta E_1 \\ &= -\ln n_1 - 1 - \alpha - \beta E_1 = 0\end{aligned}$$

よって, $n_1 = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta E_1}$.
$\partial F/\partial n_2$, $\partial F/\partial n_3$についても同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial n_2} &= -\frac{\partial(n_2 \ln n_2)}{\partial n_2} - \alpha - \beta E_2 \\ &= -\ln n_2 - 1 - \alpha - \beta E_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial n_3} &= -\frac{\partial(n_3 \ln n_3)}{\partial n_3} - \alpha - \beta E_3 \\ &= -\ln n_3 - 1 - \alpha - \beta E_3 = 0\end{aligned}$$

したがって, $n_2 = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta E_2}$, $n_3 = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta E_3}$
ゆえに, $n_i = e^{-(1+\alpha)} e^{-\beta E_i} \cdots$(答)

第３章

［問題 3.1］次の関数のマクローリン展開式を求めよ。

(1) $\cos x$ (2) $\ln(1+x)$ (3) $(1+x)^\alpha$

(4) $\cosh x \equiv (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ (5) $\sinh x \equiv (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$

解）

(1)

$f(x) = \cos x$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ より $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ より $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ より $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ より $f^{(4)}(0) = 1$

$\vdots$

よって $\cos x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

(2)

$f(x) = \ln(1+x)$ とおくと、$f(0) = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1}$ より $f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$ より $f''(0) = -1$

$\vdots$

よって $\ln(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

(3)

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ より $f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ より $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

よって $(1+x)^{\alpha}$のマクローリン展開は

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

(4)

$f(x) = \cosh x$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = \sinh x$ より $f'(0) = 0$

$f''(x) = \cosh x$ より $f''(0) = 1$

$f'''(x) = \sinh x$ より $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cosh x$ より $f^{(4)}(0) = 1$

$\vdots$

よって $\cosh x$ のマクローリン展開は

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

(5)

$f(x) = \sinh x$ とおくと、$f(0) = 0$

$f'(x) = \cosh x$ より $f'(0) = 1$

$f''(x) = \sinh x$ より $f''(0) = 0$

$f'''(x) = \cosh x$ より $f'''(0) = 1$

$f^{(4)}(x) = \sinh x$ より $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cosh x$ より $f^{(5)}(0) = 1$

$\vdots$

よって、$\sinh x$ のマクローリン展開は

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

［問題 3.2］次のマクローリン展開の最初の数項を求めよ。

(1) $e^x \sin x$　(2) e^{-x^2}　(3) $\cos[\ln(1+x)]$

解）

(1)

$f(x) = e^x \sin x$ とおくと、$f(0) = 0$

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ より $f'(0) = 1$

$f''(x) = 2e^x \cos x$ より $f''(0) = 2$

$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$ より $f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x$ より $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = -4e^x \sin x - 4e^x \cos x$ より $f^{(5)}(0) = -4$

$\vdots$

よって $e^x \sin x$ のマクローリン展開は

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$$

(2)

$f(x) = e^{-x^2}$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$ より $f'(0) = 0$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ より $f''(0) = -2$

$f'''(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2}$ より $f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2}$ より $f^{(4)}(0) = 12$

$f^{(5)}(x) = -120xe^{-x^2} + 160x^3e^{-x^2} - 32x^5e^{-x^2}$ より $f^{(5)}(0) = 0$

$f^{(6)}(x) = -120e^{-x^2} + 720x^2e^{-x^2} - 480x^4e^{-x^2} + 64x^6e^{-x^2}$

より $f^{(6)}(0) = -120$

$\vdots$

よって、e^{-x^2} のマクローリン展開は

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

(3)

$f(x) = \cos[\ln(1+x)]$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin[\ln(1+x)](1+x)^{-1}$ より $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos[\ln(1+x)](1+x)^{-2} + \sin[\ln(1+x)](1+x)^{-2}$

より $f''(0) = -1$

$f'''(x) = 3\cos[\ln(1+x)](1+x)^{-3} - \sin[\ln(1+x)](1+x)^{-3}$

より $f'''(0) = 3$

$f^{(4)}(x) = -10\cos[\ln(1+x)](1+x)^{-4}$ より $f^{(4)}(0) = -10$

$\vdots$

よって $\cos[\ln(1+x)]$ のマクローリン展開は

$$\cos[\ln(1+x)] = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \cdots$$

［問題 3.3］$x \sim 0$、$y \sim 0$ として次の関数のマクローリン展開を求めよ。

(1)　e^{x+y}　(2)　$\cos(x-y)$

解）

(1) $f(x,y) = e^{x+y}$とおくと、$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = e^{x+y}$ より $f_x(0,0) = 1$

$f_y(x,y) = e^{x+y}$ より $f_y(0,0) = 1$

$f_{xx}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{xx}(0,0) = 1$

$f_{xy}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$

$f_{yy}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{yy}(0,0) = 1$

$f_{xxx}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{xxx}(0,0) = 1$

$f_{xxy}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{xxy}(0,0) = f_{xyx}(0,0) = f_{yxx}(0,0) = 1$

$f_{xyy}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{xyy}(0,0) = f_{yxy}(0,0) = f_{yyx}(0,0) = 1$

$f_{yyy}(x,y) = e^{x+y}$ より $f_{yyy}(0,0) = 1$

$\vdots$

よって e^{x+y} のマクローリン展開は

$$e^{x+y} = 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots$$

(2)

$f(x,y) = \cos(x-y)$ とおくと、$f(0,0) = 1$

$f_x(x,y) = -\sin(x-y)$ より $f_x(0,0) = 0$

$f_y(x,y) = \sin(x-y)$ より $f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(x,y) = -\cos(x-y)$ より $f_{xx}(0,0) = -1$

$f_{xy}(x,y) = \cos(x-y)$ より $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$

$f_{yy}(x,y) = -\cos(x-y)$ より $f_{yy}(0,0) = -1$

$f_{xxx}(x,y) = \sin(x-y)$ より $f_{xxx}(0,0) = 0$

$f_{xxy}(x,y) = -\sin(x-y)$ より $f_{xxy}(0,0) = f_{xyx}(0,0) = f_{yxx}(0,0) = 0$

$f_{xyy}(x,y) = \sin(x-y)$ より $f_{xyy}(0,0) = f_{yxy}(0,0) = f_{yyx}(0,0) = 0$

$f_{yyy}(x,y) = -\sin(x-y)$ より $f_{yyy}(0,0) = 0$

$f_{xxxx}(x,y) = \cos(x-y)$ より $f_{xxxx}(0,0) = 1$

$f_{xxxy}(x,y) = -\cos(x-y)$ より

$f_{xxxy}(0,0) = f_{xxyx}(0,0) = f_{xyxx}(0,0) = f_{yxxx}(0,0) = -1$

$f_{xxyy}(x,y) = \cos(x-y)$ より

$f_{xxyy}(0,0) = f_{xyyx}(0,0) = f_{xyxy}(0,0) = f_{yxyx}(0,0) = f_{yxxy}(0,0) = f_{yyxx}(0,0) = 1$

$f_{xyyy}(x,y) = -\cos(x-y)$ より

$f_{xyyy}(0,0) = f_{yxyy}(0,0) = f_{yyxy}(0,0) = f_{yyyx}(0,0) = -1$

$f_{yyyy}(x,y) = \cos(x-y)$ より $f_{yyyy}(0,0) = 1$

$\vdots$

よって $\cos(x-y)$ のマクローリン展開は

$$\cos(x-y) = 1 - \frac{(x-y)^2}{2!} + \frac{(x-y)^4}{4!} - \cdots + \frac{(x-y)^{2n}}{2n!} + \cdots$$

[問題 3.4] マクローリン展開を利用して、次の量の近似値を求めよ。

(1) $\ln 1.01$ (2) $\sin 0.02$

解）

(1)

$f(x) = \ln(1+x)$ とおくと、$f(0) = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1}$ となり $f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$ となり $f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$ となり $f'''(0) = 2$

$\vdots$

よって $\ln(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$x = 0.01$ を代入すると

$$\begin{aligned} \ln(1.01) &= 0.01 - \frac{0.01^2}{2} + \frac{0.01^3}{3} + \cdots \\ &\simeq 0.01 \end{aligned}$$

(2)

$f(x) = \sin x$ とおくと、$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ より $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ より $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ より $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x$ より $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x$ より $f^{(5)}(0) = 1$

$\vdots$

よって $\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$x = 0.02$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sin 0.02 &= 0.02 - \frac{0.02^3}{3!} + \frac{0.02^5}{5!} - \cdots \\ &\simeq 0.02 \end{aligned}$$

［問題 3.5］次の関数を指定された点の周りで第三項目まで展開せよ。

(1) e^x $(x = 2)$ (2) $\cos x$ $(x = \pi)$ (3) a^x $(x = 0)$

解）

(1)

$f(x) = e^x$とおくと、$f(2) = e^2$

$f'(x) = e^x$ より $f'(2) = e^2$

$f''(x) = e^x$ より $f''(2) = e^2$

$\vdots$

よって

$$e^x = e^2\left[1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots\right]$$

(2)

$f(x) = \cos x$ とおくと、$f(\pi) = -1$

$f'(x) = -\sin x$ より $f'(\pi) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ より $f''(\pi) = 1$

$f'''(x) = \sin x$ より $f'''(\pi) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ より $f^{(4)}(\pi) = -1$

$\vdots$

よって

$$\cos x = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \cdots$$

(3)

$f(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ とおくと、$f(0) = 1$

$f'(x) = \ln a e^{x \ln a}$ より $f'(0) = \ln a$

$f''(x) = (\ln a)^2 e^{x \ln a}$ より $f''(0) = (\ln a)^2$

$\vdots$

よって

$$a^x = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln a)^2}{2}x^2 + \cdots$$

［問題 3.6］次の $x = 0$ の近傍における近似式を証明せよ。

$$\coth x - \frac{1}{x} \cong \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \cdots$$

解）

まず、

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \cong a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

とおく。

$$
\begin{aligned}
\cosh x &\cong 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \\
\sinh x &\cong x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots
\end{aligned}
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
\cosh x &\cong \sinh x(a_0+a_1x+a_3x^3+a_4x^4+\cdots) \\
&= x(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots) \\
&+ \frac{1}{3!}x^3(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots) \\
&+ \frac{1}{5!}x^5(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots)+\cdots
\end{aligned}
$$

となる。項と係数の関係より両辺を比較すると
$xa_0=1$ より $a_0=1/x$

$a_1=1/2$

$a_2+a_0/3!=0$ より $a_2=-1/6x$

$a_3+a_1/3!=1/4!$ より $a_3=-1/24$

$a_4+a_2/3!+a_0/5!=0$ より $a_4=1/36x-1/5!x$

よって

$$
\begin{aligned}
\coth x &\cong \frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{6x}\cdot x^2-\frac{1}{24}\cdot x^3+\left(\frac{1}{36x}-\frac{1}{5!x}\right)\cdot x^4+\cdots \\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\coth x-\frac{1}{x}\cong\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3+\cdots
$$

［問題 3.7］次の関数の極小点を求め、その点の周りで関数を展開して x の二次の項まで求めよ。（$x>0$ とする。）

$$
V(x)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]
$$

解）
まず、極小点を求める。関数 $V(x)$ を x で微分すると

$$
V'(x)=4\varepsilon\left(-12\sigma^{12}x^{-13}+6\sigma^6x^{-7}\right)
$$

極小点を $x=x_0$ とすると

$$
V'(x_0)=4\varepsilon\left(-12\sigma^{12}x^{-13}+6\sigma^6x^{-7}\right)=0
$$

より、$x_0^6=2\sigma^6$。よって極小点は $x_0=2^{1/6}\sigma$。

次に極小点 $x_0=2^{1/6}\sigma$ の周りで関数 $V(x)$ を展開していく。$x_0=2^{1/6}\sigma$ より $\sigma/x_0=2^{-1/6}$ であるから

$$
V(x_0)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x_0}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{x_0}\right)^{6}\right]=4\varepsilon(2^{-2}-2^{-1})=4\varepsilon(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=-\varepsilon
$$

また、$V''(x) = 4\varepsilon\left(12 \cdot 13\sigma^{12}x^{-14} - 6 \cdot 7\sigma^{6}x^{-8}\right)$ より

$$V''(x_0) \quad = \quad 4\varepsilon\left(12 \cdot 13\sigma^{12}x_0^{-14} - 6 \cdot 7\sigma^{6}x_0^{-8}\right) = 4\varepsilon\left(12 \cdot 13 \cdot 2^{-14/6}\sigma^{-2} - 6 \cdot 7 \cdot 2^{-8/6}\sigma^{-2}\right) = 2 \cdot 36 \cdot 2^{-2/6}\varepsilon\sigma^{-2}$$

よって、極小点 $x_0 = 2^{1/6}\sigma$ の周りでの展開式は

$$\begin{aligned} V(x) &\fallingdotseq V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &= -\varepsilon + \frac{1}{2!} \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2^{-2/6}\varepsilon\sigma^{-2}\left(x - 2^{1/6}\sigma\right)^2 = -\varepsilon + 36\varepsilon\left(\frac{x}{2^{1/6}\sigma} - 1\right)^2 \end{aligned}$$

［問題 3.8］$\sinh x$ の逆関数を $\sinh^{-1} x$ と書く。すなわち、$y = \sinh^{-1} x$ のとき $x = \sinh y$。このとき

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

であることを示せ。
解）

$$y = \sinh^{-1} x \Longleftrightarrow x = \sinh y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2}$$

より、

$$\mathrm{e}^{y} - \frac{1}{\mathrm{e}^{y}} = 2x \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{2y} - 2x\mathrm{e}^{y} - 1 = 0$$

２次方程式を解くと、$\mathrm{e}^{y} = x + \sqrt{x^2 + 1}$ $(\mathrm{e}^{y} > 0)$。よって

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

［問題 3.9］同じ大きさの本をずらして積み上げることを考える。上の本が落ちない範囲でぎりぎりのところまでずらせて積み重ねるとき、もっとも上の本と最下段の本との距離はいくらでも大きくできることを示せ。

解)
　まず、本の長さを $2a$ とし二冊の本を積み重ねる場合から考えていく。この場合、一冊目の本の重心の位置 A のところを支えれば積み重ねることができるので、二冊目の本のふちが一冊目の本の重心に来るようにする（図 4）。次に三冊の本をずらして積み重ねる場合、図 5 のように B には一冊分の重さがかかり、C は二冊目の重心だから一冊分の重さがかかる。なので、B と C の中心、つまり本の端から $a/2$ の長さのところで支えるように、三冊目の本を重ねる。四冊の本をずらして積み重ねる場合、図 6 のように D には二冊分の重さがかかり、E には一冊分の重さがかかる。なので、本の端から $a/3$ の長さのところで支えるように、四冊目の本を重ねる。五冊目以降も同様に積み重ねていくと（図 7）、上から ｎ 番目と $n+1$ 番目の本の距離が a/n であれば、本を積み重ねることができるから、もっとも上の本と最下段の本との距離は

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} + \frac{a}{5} + \cdots \frac{a}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$$

となる。ここでd’Alembert（ダランベール）の判定法

d’Alembert（ダランベール）の判定法

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \leq 0)$ を、極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ により級数の収束性を判定できる。
$0 \leq L < 1$ のとき収束する。
$L > 1$ のとき発散する。
$L = 1$ のときは判定できない。

を用いて n 項目は $a_n = a/n$ より

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 (n \to \infty)$$

となりd’Alembert（ダランベール）の判定法では判定ができないので積分判定法[1]を用いる。ここで、$f(x) = a/x (x \geq 1)$ とおくと区間 $[1, \infty)$ において $f'(x) = -a/x^2 < 0$ より単調減少関数であり、

$$\int_1^{\infty} \frac{a}{x} dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_1^{\beta} \frac{a}{x} dx = \lim_{\beta\to\infty} \big[a \ln x\big]_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty} a \ln\beta - a \ln 1 = \infty$$

積分判定法より $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{a}{x} dx$ の収束、発散と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n}$ の収束、発散は一致するので、$\sum \frac{a}{n}$ は発散する。よって、もっとも上の本と最下段の本との距離はいくらでも大きくできる。

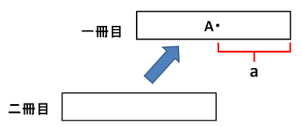

Fig. 4: 本を二冊積み重ねるとき

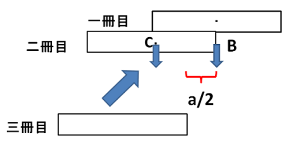

Fig. 5: 本を三冊積み重ねるとき

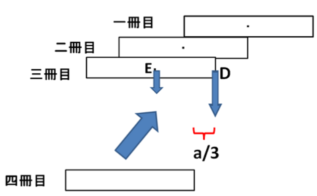

Fig. 6: 本を四冊積み重ねるとき

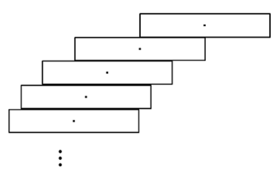

Fig. 7: 本を五冊以上積み重ねるとき

[1]積分判定法
$f(x) \geq 0$ が単調減少関数であるとき、広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{a}{x} dx$ の収束、発散と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{n}$ の収束、発散は一致する

［問題 3.10］小さな振幅の振り子の運動方程式 (3.18) を、初期条件 $t = 0$ において $\theta = 0$、$d\theta/dt = v_0/l$ として解け。
解）
教科書 p.34 の式 (3.18) より

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \equiv -\omega^2\theta$$

$\theta = \mathrm{e}^{\lambda t}$ とおいて上の式に代入すると、特性方程式は

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$
$$\therefore \lambda = \pm i\omega$$

よって、$x = \mathrm{e}^{\pm i\omega t}$ が基本解となり、一般解はオイラーの公式を用いて

$$\begin{aligned}\theta(t) &= C_1'\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2'\mathrm{e}^{-i\omega t} \ \ (C_1', C_2' : \text{任意定数}) \\ &= C_1'(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2'(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= (C_1' + C_2')\cos\omega t + i(C_1' - C_2')\sin\omega t \\ &= C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \ \ (C_1' + C_2' = C_1, C_1' - C_2' = C_2 : \text{任意定数})\end{aligned}$$

初期条件 $t = 0$ において $\theta = 0$ より $C_1 = 0$。よって

$$\theta(t) = C_2\sin\omega\theta$$

また、上の式を t で微分して

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega C_2\cos\omega t$$

初期条件 $t = 0$ のとき $d\theta/dt = v_0/l$ より $C_2 = v_0/\omega l$。よって

$$\theta(t) = \frac{v_0}{\omega l}\sin\omega t$$

［問題 3.11］k^2 が小さいとして (3.23) 展開して (3.24) を導け。

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta'}} \tag{3.23}$$

$$K(k) \cong \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \tag{3.24}$$

解）
$f(k) = 1/\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta'}$ とおき、$k = 0$ の周りで展開する。ここで、$k = 0$ のとき $f(0) = 1$。

$$f'(k) = \{(1 - k^2\sin^2\theta')^{-1/2}\}' = (1 - k^2\sin^2\theta')^{-3/2}\cdot k\sin^2\theta'$$

より $f'(0) = 0$

$$\begin{aligned}f''(k) &= -\frac{3}{2}(1 - k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot(-2k^2\sin^4\theta') + (1 - k^2\sin^2\theta')^{-3/2}\cdot\sin^2\theta' \\ &= 3(1 - k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot k^2\sin^4\theta' + (1 - k^2\sin^2\theta')^{-3/2}\cdot\sin^2\theta'\end{aligned}$$

より $f''(0) = \sin^2\theta'$

$$\begin{aligned} f'''(k) &= -\frac{3\cdot 5}{2}(1-k^2\sin^2\theta')^{-7/2}\cdot(-2k^3\sin^6\theta') + 3(1-k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot 2k\sin^4\theta' \\ &\quad -\frac{3}{2}(1-k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot(-2k\sin^4\theta') \\ &= 15(1-k^2\sin^2\theta')^{-7/2}\cdot k^3\sin^6\theta' + 9(1-k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot k\sin^4\theta' \end{aligned}$$

より $f'''(0) = 0$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(k) &= -\frac{15\cdot 7}{2}(1-k^2\sin^2\theta')^{-9/2}\cdot(-2k^4\sin^8\theta') + 15(1-k^2\sin^2\theta')^{-7/2}\cdot 3k^2\sin^6\theta' \\ &\quad -\frac{9\cdot 5}{2}(1-k^2\sin^2\theta')^{-7/2}\cdot(-2k^2\sin^6\theta') + 9(1-k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot\sin^4\theta' \\ &= 105(1-k^2\sin^2\theta')^{-9/2}\cdot k^4\sin^8\theta' + 90(1-k^2\sin^2\theta')^{-7/2}\cdot k^2\sin^6\theta' + 9(1-k^2\sin^2\theta')^{-5/2}\cdot\sin^4\theta' \end{aligned}$$

より $f^{(4)}(0) = 9\sin^4\theta'$。

よって

$$\begin{aligned} f(k) &= f(0) + f'(0)k + \frac{f''(0)}{2!}k^2 + \frac{f'''(0)}{3!}k^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}k^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta' + \frac{9}{4!}k^4\sin^4\theta' + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\theta' + \frac{3}{8}k^4\sin^4\theta' + \cdots \end{aligned}$$

したがって、$K(k)$ は

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} f(k)d\theta' = \int_0^{\pi/2} d\theta' + \frac{1}{2}k^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta' d\theta' + \frac{3}{8}k^4\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta' d\theta' + \cdots$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} d\theta' &= \big[\theta'\big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta' d\theta' &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta')d\theta' = \frac{1}{2}\Big[\theta' + \frac{1}{2}\sin 2\theta'\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

三倍角の公式 $\sin 3\theta' = 3\sin\theta' - 4\sin^3\theta'$ を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2}\sin^4\theta' d\theta' &= \int_0^{\pi/2}\sin\theta'\sin^3\theta' d\theta' = \int_0^{\pi/2}\sin\theta'\cdot\frac{1}{4}(3\sin\theta' - \sin 3\theta')d\theta' \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(3\sin^2\theta' - \sin\theta'\sin 3\theta')d\theta' = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta' d\theta' - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin\theta'\sin 3\theta' d\theta' \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta')d\theta' - \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}(\cos 4\theta' - \cos 2\theta')d\theta' \\ &= \frac{3}{8}\Big[\theta' - \frac{1}{2}\sin 2\theta'\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{4}\sin 4\theta' - \frac{1}{2}\sin 2\theta'\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} K(k) &\cong \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}k^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8}k^4\cdot\ \frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} + \cdots \\ &= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right] \end{aligned}$$

第 4 章

[問題 4.1] P.36 の調和振動子の解（4.4）の定数を, 初期条件 $t = 0$ において, $x = 0$, $dx/dt = v_0$(平衡位置を初速 v_0 で動き始める) を満たすように決定し, 解を求めよ.

[解答]
(4.4) に $t = 0$ を代入する.

$$x(0) = C_1 + C_2 = 0$$

また, dx/dt にも $t = 0$ を代入すると

$$\frac{dx(0)}{dt} = i\omega(C_1 - C2) = v_0$$

となる. これらより

$$C_1 = -C_2$$

$$i\omega(2C_1) = v_0$$

$$C_1 = \frac{v_0}{2i\omega} \ \ , \ \ C_2 = -\frac{v_0}{2i\omega}$$

よって

$$x(t) = \frac{v_0}{2i\omega}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

オイラーの公式より

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

[問題 4.2] 次の微分方程式の一般解を求めよ.
(1) $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ (2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$
(3) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$

[解答]
(1)

$$b^2 - ac = 4 > 0$$

よって, この方程式の一般解は

$$\begin{aligned} x &= e^{-3t}(C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}) \\ &= C_1e^{-t} + C_2e^{-5t} \end{aligned}$$

である.

(2)

$$b^2 - ac = -4 < 0$$

よって, この方程式の一般解は

$$x = e^{-t}(C_1e^{2it} + C_2e^{-2it})$$

である.

(3)

$$b^2 - ac = 0$$

よって, この方程式の一般解は

$$x = e^{-t}(C_1 + C_2 t)$$

である.

[問題 4.3] 前問で求めた一般解の任意定数を,$t = 0$ において $x = 1$,$dx/dt = 0$ を満たすように決定せよ.

[解答]

(1)

$t = 0$ を代入する.

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

また, dx/dt にも $t = 0$ を代入すると

$$\frac{dx(0)}{dt} = -C_1 - 5C_2 = 0$$

これらより

$$C_1 = \frac{5}{4} \ , \ C_2 = -\frac{1}{4}$$

よって

$$x = \frac{1}{4}(5e^{-t} - e^{-5t})$$

(2)

$t = 0$ を代入する.

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

また, dx/dt にも $t = 0$ を代入すると

$$\frac{dx(0)}{dt} = -(C_1 + C_2) + 2i(C_1 - C_2) = 0$$

これらより

$$C_1 = \frac{2i+1}{4i} = \frac{2-i}{4} \ , \ C_2 = \frac{2i-1}{4i} = \frac{2+i}{4}$$

よって

$$x = e^{-t}\left(\frac{2-i}{4}e^{2it} + \frac{2+i}{4}e^{-2it}\right)$$

(3)

$t = 0$ を代入する.

$$x(0) = C_1 = 1$$

また, dx/dt にも $t = 0$ を代入すると

$$\frac{dx(0)}{dt} = -C_1 + C_2 = 0$$

これらより

$$C_1 = 1 \ , \ C_2 = 1$$

よって

$$x = e^{-t}(1 + t)$$

[問題 4.4] 微分方程式（4.9）において, 臨界制動の条件 ($\kappa^2 = \omega_0^2$) が満たされる場合を考える. $t = 0$ における初期条件 $x = a, dx/dt = v_0$ のいろいろな組合せを考え ($a > 0$ として, v_0 の大きさ, 符号を変える), 運動の様子がどのように変るかを考察せよ.

[解答]

$x(t) = e^{-\kappa t}(C_1 + C_2 t)$ を考えると,

$$x(0) = C_1 = a$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = -\kappa C_1 + C_2 = v_0$$

これらより

$$C_1 = a \ , \ C_2 = v_0 + \kappa a$$

となり, 元の式は

$$x(t) = e^{-\kappa t}[a + (v_0 + \kappa a)t]$$

となる. この式の様子を $a = 1$ として下図に示す.

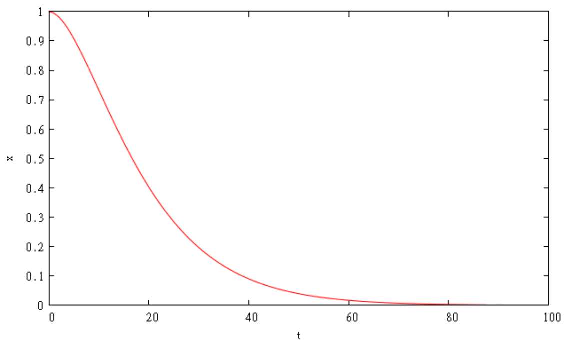

Fig. 8: $v_0 = 0, \kappa = 1$ の図

[問題 4.5] $d^2x/dt^2 + 6dx/dt + 9x = 0$ の一般解を次の手順により求めよ.

(1) $x = f(t)e^{-3t}$ とおき, $f(t)$ の満たす微分方程式を導く.

(2) (1) の方程式を解いて一般解を求める.

[解答]

(1)

$x = f(t)e^{-3t}$ とおくと

$$\frac{dx}{dt} = f'(t)e^{-3t} - 3f(t)e^{-3t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)e^{-3t} - 6f'(t)e^{-3t} + 9f(t)e^{-3t}$$

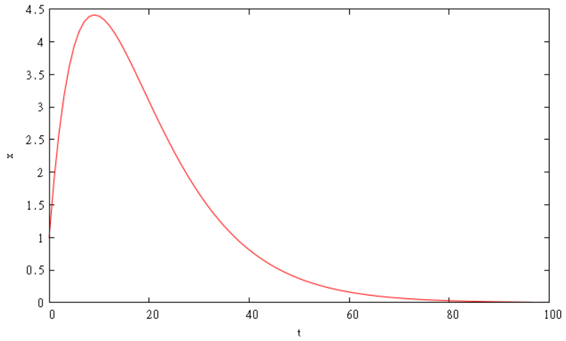

Fig. 9: $v_0 = 10, \kappa = 1$ の図

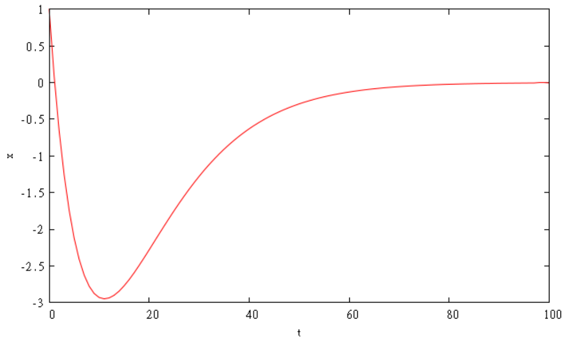

Fig. 10: $v_0 = -10, \kappa = 1$ の図

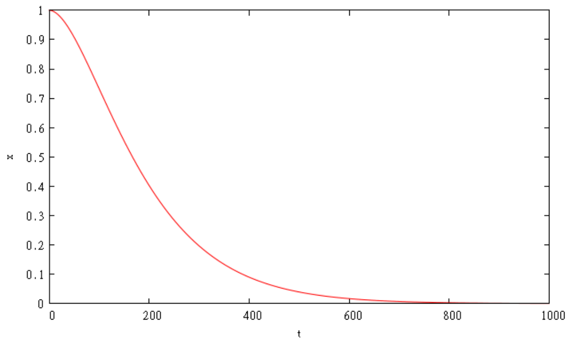

Fig. 11: $v_0 = 0, \kappa = 0.1$ の図

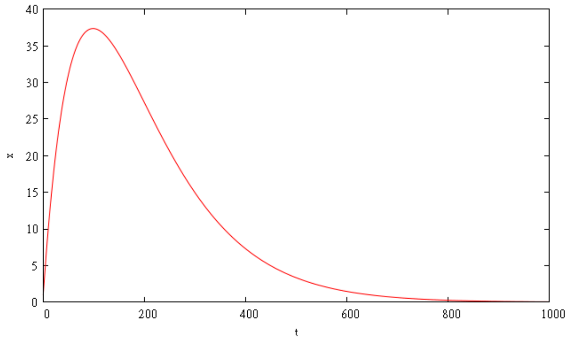

Fig. 12: $v_0 = 10, \kappa = 0.1$ の図

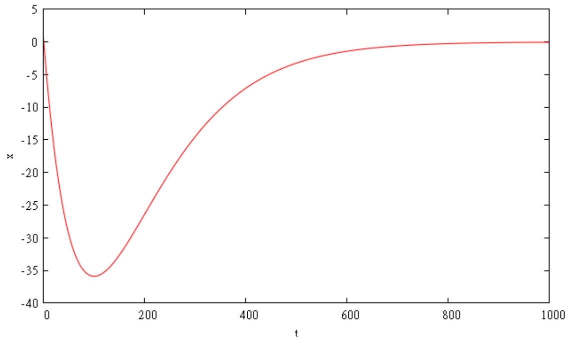

Fig. 13: $v_0 = -10, \kappa = 0.1$ の図

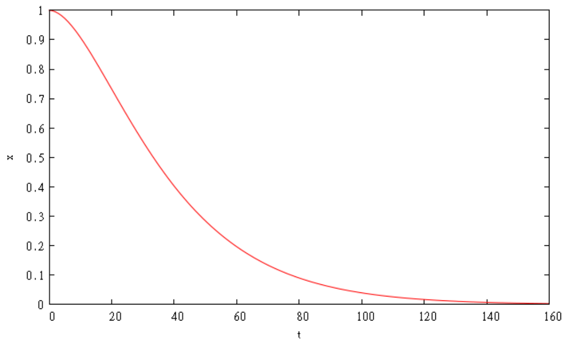

Fig. 14: $v_0 = 0, \kappa = 5.0$ の図

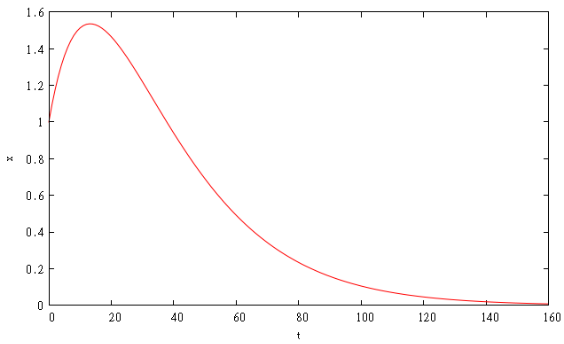

Fig. 15: $v_0 = 10$, $\kappa = 5.0$ の図

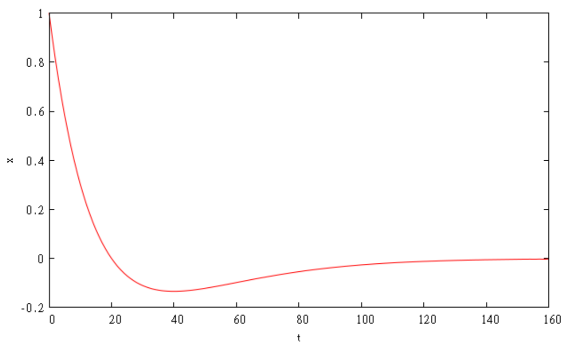

Fig. 16: $v_0 = -10$, $\kappa = 5.0$ の図

これらを代入すると

$$\begin{aligned} x &= f''(t)e^{-3t} - 6f'(t)e^{-3t} + 9f(t)e^{-3t} + 6f'(t)e^{-3t} - 18f(t)e^{-3t} + 9f(t)e^{-3t} \\ &= f''(t)e^{-3t} = 0 \end{aligned}$$

$e^{-3t} \neq 0$ より

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

(2)
$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$ を積分すると

$$\frac{df}{dt} = C_2$$

これをさらに積分すると

$$f = C_1 + C_2 t$$

これより, この方程式の一般解は

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}$$

である.

[問題 4.6] 次の微分方程式の一般解を求めよ.
(1) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 24e^{-3x}$　(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 - x$
(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 25y = \sin x$

[解答]
(1) まず, $y = Ae^{-3t}$ とおいて代入すると

$$A(9 + 6 - 3)e^{-3x} = 24e^{-3x}$$

から

$$A = 2$$

となり, 特解は

$$y = 2e^{-3x}$$

となる.
次に, 右辺を 0 とした同次方程式の一般解を求める.

$$b^2 - ac = 4 > 0$$

よって

$$y = e^x(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

となる. これらよりこの方程式の一般解は

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + 2e^{-3x}$$

である.

(2) まず, $y = Ax^2 + Bx + C$ とおいて代入すると

$$2A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + c) = x^2 - x$$

となり, これを整理すると

$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x - 2A + B - 2c = x^2 - x$$

となる. これより

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - 2B = -1 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases}$$

となる. またこれらより

$$A = -\frac{1}{2} \ , \ B = 0 \ , \ C = -\frac{1}{2}$$

が求まる. 以上より特解は

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

となる.

次に, 右辺を 0 とした同次方程式の一般解を求める.

$$b^2 - ac = \frac{9}{4} > 0$$

よって

$$y = e^{-\frac{1}{2}}(C_1 e^{\frac{3}{2}} + C_2 e^{-\frac{3}{2}}) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

となる. これらよりこの方程式の一般解は

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

である.

(3) まず, $y = A\cos x + B\sin x$ とおいて代入して整理すると

$$(24A + 8B)\cos x + (-8A + 24B)\sin x$$

となる. これより

$$\begin{cases} 24A + 8B = 0 \\ -8A + 24B = 1 \end{cases}$$

となる. またこれらより

$$A = -\frac{1}{80} \ , \ B = \frac{3}{80}$$

が求まる. 以上より特解は

$$y = \frac{1}{80}(3\sin x - \cos x)$$

となる.

次に, 右辺を 0 とした同次方程式の一般解を求める.

$$b^2 - ac = -9 < 0$$

よって

$$y = e^{-4x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix})$$

となる. これらよりこの方程式の一般解は

$$y = e^{-4x}(C_1 e^{3ix} + C_2 e^{-3ix}) + \frac{1}{80}(3\sin x - \cos x)$$

である.

[問題 4.7] 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

の特解を求めよ.（ヒント： $y = Ax^2e^x$ を仮定せよ.）

[解答]

$y = Ax^2e^x$ とおいて代入すると

$$\frac{dy}{dx} = 2Axe^x + Ax^2e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

となる. これらを代入すると

$$2Ae^x = e^x$$

となり

$$A = \frac{1}{2}$$

が求まる. 以上よりこの方程式の特解は

$$y = \frac{x^2}{2}e^x$$

である.

[問題 4.8] 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = \cos\omega t$$

の解で, 初期条件 $t = 0$ において $x = 1$, $dx/dt = 0$ を満たすものを求め, その時間依存性を図示せよ.

[解答]

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ とおいて代入すると

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + 2(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + 5(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \cos\omega t$$

となる. これより

$$\begin{cases} A(5-\omega^2) + 2B\omega = 1 \\ B(5-\omega^2) - 2A\omega = 0 \end{cases}$$

となり, これらから

$$A = \frac{5-\omega^2}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2} \quad , \quad B = \frac{2\omega}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

が求まる. よって特解は

$$x = \frac{5-\omega^2}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}\cos\omega t + \frac{2\omega}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}\sin\omega t$$

である.

次に, 右辺を 0 とした同次方程式の一般解を求める.

$$b^2 - ac = -4 < 0$$

より

$$x = e^{-t}(C_1e^{2it} + C_2e^{-2it})$$

となる. 以上よりこの方程式の一般解は, オイラーの公式より

$$x = e^{-t}[C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2\{\cos(-2t) + i\sin(-2t)\}] + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

である.

次に, この一般解に $t = 0$ を代入する.

$$x(0) = C_1 + C_2 + A = 1$$

また, dx/dt にも $t = 0$ を代入すると

$$\frac{dx(0)}{dt} = -(C_1 + C_2) + 2i(C_1 - C_2) + B\omega = 0$$

これらから

$$C_1 + C_2 = 1 - A \quad C_1 - C_2 = \frac{1 - A - B\omega}{2i}$$

となる. これらと, $\cos(-2t) = \cos 2t$, $\sin(-2t) = -\sin 2t$ を一般解に代入すると

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}\{C_1(\cos 2t + i\sin 2t) + C_2(\cos 2t - i\sin 2t)\} + A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= e^{-t}\{(C_1 + C_2)\cos 2t + (C_1 - C_2)i\sin 2t\} + A\cos\omega t + B\sin\omega t \end{aligned}$$

よって, この方程式の解で条件を満たすものは

$$x = e^{-t}\left\{(1 - A)\cos 2t + \left(\frac{1 - A - \omega B}{2}\right)\sin 2t\right\} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

である. また, 時間依存性を図 10 に示す.

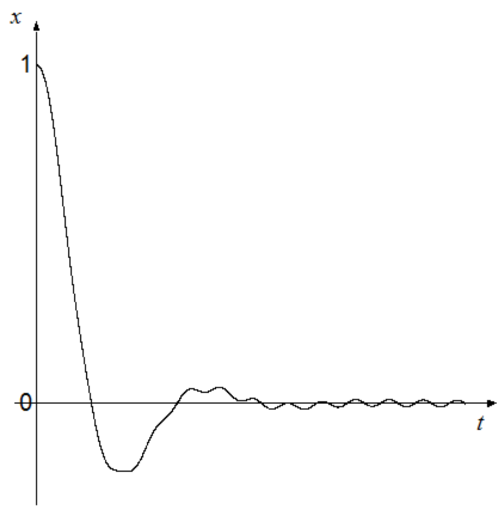

Fig. 17: 時間依存性

[問題 4.9] 図（P.44 参照）のような抵抗 R, コンデンサー C, コイル L および AC 電源からなる回路を考える. 時刻 t における回路内の電流を $I(t)$, コンデンサーに蓄えられた電気量を $q(t)$ とすると, キルヒホッフの法則より,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = V$$

この式を t で微分して, $I = dq/dt$ を用いると

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}$$

となる. $V = V_0 \cos\omega t$ として, 共振振動数を求めよ.

[解答]

まず, $I = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ とおくと

$$L(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t) + R(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) + \frac{1}{C}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -V_0\omega\sin\omega t$$

となる. これを整理すると

$$\begin{cases} -LA\omega^2 + RB\omega + \frac{A}{C} = 0 \\ -LB\omega^2 - RA\omega + \frac{B}{C} = -V_0\omega \end{cases}$$

と表せる. これらより

$$A = \frac{-RB\omega C}{1 - CL\omega^2} \ \ , \ \ B = \frac{LA\omega^2}{\omega R} - \frac{A}{\omega RC}$$

となる. A を sin の式に代入し, 変形する.

$$-L\omega^2\left(\frac{LA\omega^2}{\omega R} - \frac{A}{\omega RC}\right) = -V_0\omega$$

$$\frac{1}{\omega R}\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)\left(LA\omega^2 - \frac{A}{C}\right) - RA\omega = -V_0\omega$$

$$-\frac{A}{\omega R}\left[\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2\right] = -V_0\omega$$

$$A = \frac{V_0\omega^2R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2}$$

$$B = \frac{V_0\omega^3L}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2} - \frac{V_0\omega}{C\left\{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2R^2\right\}}$$

この A の式で最も振動数 ω の振幅が大きい部分は $(1/C - L\omega^2)^2$ なので

$$\frac{1}{C} - L\omega^2 = 0$$

の時共振が起こる.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

よって, 共振振動数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

である.

第 5 章

[問題 5.1]　(5.9),(5.10) の定数を、$t = 0$ において $dx_1/dt = v_0, x_1 = x_2 = 0, dx_2/dt = 0$ という初期条件を満たすように決定せよ。また、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ の時間依存性を図示せよ。
（解答）

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{2}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + D_1 e^{i\omega' t} + D_2 e^{-i\omega' t}) \cdots (5.9) \text{ 式} \\
x_2(t) &= \frac{1}{2}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} - D_1 e^{i\omega' t} - D_2 e^{-i\omega' t}) \cdots (5.10) \text{ 式}
\end{aligned}
$$

の 2 式が t=0 において、x_1=x_2=0 であることより

$$
\begin{aligned}
x_1(0) &= \frac{1}{2}(C_1 e^{i\omega 0} + C_2 e^{-i\omega 0} + D_1 e^{i\omega' 0} + D_2 e^{-i\omega' 0}) \\
&= \frac{1}{2}(C_1 + C_2 + D_1 + D_2) \\
&= 0 \cdots ①
\end{aligned}
\tag{0.4}
$$

$$
x_2(0) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2 - D_1 - D_2)
\tag{0.5}
$$

また、t=0 において $\frac{dx_1}{dt}$=v_0,$\frac{dx_2}{dt}$=0 を用いて、

$$
x_1'(t) = \frac{1}{2}(\omega C_1 e^{i\omega t} + (-i\omega)C_2 e^{-i\omega t} + i\omega' D_1 e^{i\omega' t} + (-i\omega')D_2 e^{-i\omega' t})
$$

これに t=0 を代入

$$
x_1'(0) = \frac{1}{2}(i\omega C_1 - i\omega C_2 + i\omega' D_1 - i\omega' D_2 = v_0 \cdots ③
$$

同様に、$x_2'(t)$ について

$$
x_1'(t) = \frac{1}{2}(i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t} - i\omega' D_1 e^{i\omega' t} + (-i\omega')D_2 e^{-i\omega' t})
$$

これに t=0 を代入

$$
x_2'(0) = \frac{1}{2}(i\omega C_1 - i\omega C_2 - i\omega' D_1 + i\omega' D_2 = 0 \cdots ④
$$

以上の、①、②、 ③、 ④ より

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 + D_1 + D_2 = 0 & \cdots \quad ① \\
C_1 + C_2 - D_1 - D_2 = 0 & \cdots \quad ② \\
i\omega C_1 - i\omega C_2 + i\omega' D_1 - i\omega' D_2 = 2v_0 & \cdots \quad ③ \\
i\omega C_1 - i\omega C_2 - i\omega' D_1 + i\omega' D_2 = 0 & \cdots \quad ④
\end{cases}
\tag{0.6}
$$

(1) を ①＋②、③＋④ をして

$$
\begin{cases}
2C_1 + 2C_2 = 0 \\
2i\omega C_1 \text{ - } 2i\omega C_2 = 2v_0
\end{cases}
\tag{0.7}
$$

(2) の辺々を足して

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 &= 0 \\
\therefore C_1 &= -C_2
\end{aligned}
$$

この結果を (2) に代入して

$$\begin{aligned} 2i\omega(-C_2) - 2i\omega C_2 &= 2v_0 \\ -2i\omega C_2 &= v_0 \\ C_2 &= -\frac{v_0}{2i\omega} \end{aligned}$$

また、$C_1 = -C_2$ より

$$C_2 = \frac{v_0}{2i\omega}$$

同様に (1) を ① − ②、③ − ④ を行い

$$\begin{cases} 2D_1 + 2D_2 = 0 \\ 2\mathrm{i}\omega' D_1 - 2\mathrm{i}\omega' D_2 = 2v_0 \end{cases} \tag{0.8}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{v_0}{2i\omega'} \\ D_2 &= -\frac{v_0}{2i\omega'} \end{aligned}$$

以上の値を、元の式 (5.9),(5.10) に代入すると

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega t} - \frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega t} + \frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega' t} - \frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega' t}\right) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega t} - \frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{v_0}{2i\omega}e^{i\omega' t} + \frac{v_0}{2i\omega}e^{-i\omega' t}\right) \end{aligned}$$

となる。

また、この $x_1(t)$ と $x_2(t)$ の時間依存性は

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega t + isin\omega t) - \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega t - isin\omega t)\right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega' t + isin\omega' t) - \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega' t - isin\omega' t)\right) \\ &= \left(\frac{v_0}{2\omega}(sin\omega t) + \frac{v_0}{2\omega}(sin\omega' t)\right) \\ &= \frac{v_0}{2}\left(\frac{\omega' sin\omega t + \omega sin\omega' t}{\omega\omega'}\right) \end{aligned}$$

同様に $x_2(t)$ について

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega t + isin\omega t) - \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega t - isin\omega t)\right. \\ &\quad \left. - \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega' t + isin\omega' t) + \frac{v_0}{2i\omega}(cos\omega' t - isin\omega' t)\right) \\ x_2(t) &= \left(\frac{v_0}{2\omega}(sin\omega t) - \frac{v_0}{2\omega}(sin\omega' t)\right) \\ &= \frac{v_0}{2}\left(\frac{\omega' sin\omega t - \omega sin\omega' t}{\omega\omega'}\right) \end{aligned}$$

となり、この 2 つを時間について図示すると次のようになる

[問題 5.2] 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。固有ベクトルは大きさ 1 に規格化せよ。

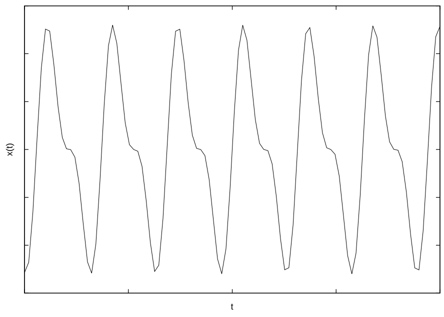

Fig. 18: $x_1(t)$ のグラフ

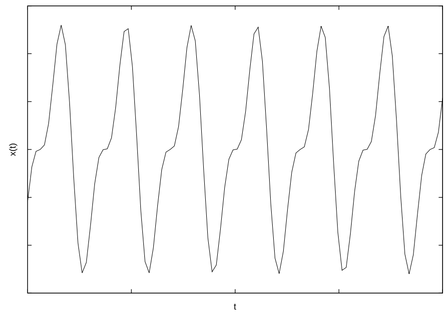

Fig. 19: $x_2(t)$ のグラフ

(1)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

より

$$\begin{aligned} (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ (\lambda - 6)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = 1, 6$$

a) $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$-2x + y = 0$$

$x = \alpha$ とすれば

$$\begin{cases} \mathrm{x}=\alpha \\ \mathrm{y}=2\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ \alpha + 4\alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

同様に考えて、

b) $\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$x + 2y = 0$$

$y = \alpha$ とすれば

$$\begin{cases} \mathrm{x}=-2\alpha \\ \mathrm{y}=\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ 4\alpha + \alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

（解答）

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-0 \end{vmatrix} = 0$$

より

$$\begin{aligned} (\lambda-3)\lambda-4 &= 0 \\ \lambda^2-3\lambda-4 &= 0 \\ (\lambda-4)(\lambda+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = -1, 4$$

a) $\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$-2x+y=0$$

$x=\alpha$ とすれば

$$\begin{cases} \text{x=}\alpha \\ \text{y=}2\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} &= 1 \\ \alpha^2+4\alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

同様に考えて、

b) $\lambda = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$x + 2y = 0$$

$y = \alpha$ とすれば

$$\begin{cases} \text{x}=-2\alpha \\ \text{y}=\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ 4\alpha^2 + \alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答）

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

より

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ (\lambda - 4)(\lambda + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = -1, 4$$

a) $\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$2x + 3y = 0$$

$x = \alpha$ とすれば

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{2}{3}\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ \alpha^2 + \frac{4}{9}\alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

同様に考えて

b) $\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$x + 2y = 0$$

$y = \alpha$ とすれば

$$\begin{cases} \mathrm{x}{=}{-2}\alpha \\ \mathrm{y}{=}\alpha \end{cases}$$

ここで、ベクトルの大きさが 1 になるよう規格化すると

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 1 \\ 4\alpha + \alpha^2 &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

よって求める固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[問題 5.3] (1)

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

(解答)
クラーメルの公式を用いて

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$
$$x = \frac{1-3}{3-1}$$
$$x = -1$$

同様に y について

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}$$
$$y = \frac{9-1}{3-1}$$
$$y = 4$$

(2)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(解答)
クラーメルの公式を用いて

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}$$
$$x = \frac{4}{4}$$
$$x = 1$$

同様に y について

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \\
y &= \frac{-2}{4} \\
y &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

同様に z について

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} \\
z &= \frac{2}{4} \\
z &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

[問題 5.4] 行列 A の行列式を $\det \mathscr{A}$ と書くとする。このとき

$$\det \mathscr{A}\mathscr{B} = \det \mathscr{A} \det \mathscr{B}$$

が成り立つことを、2×2 行列について示せ。

(解答)

$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$\mathscr{B} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \det \mathscr{A}\mathscr{B} \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \\
&= (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) \\
&= adps + bcqr - adqr - bcps \\
&= (ad-bc)(ps-qr) \\
&= \det \mathscr{A} \det \mathscr{B} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

以上より

$$\det \mathscr{A}\mathscr{B} = \det \mathscr{A} \det \mathscr{B}$$

が示された。

[問題 5.5] 3 つの行列

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathscr{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

について次のことを証明せよ。

(1)$\mathscr{A}^2 = \mathscr{B}^2 = \mathscr{C}^2 = \mathscr{E}$ ($\mathscr{E}$ は単位行列)

(2)$\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B}\mathscr{A} = 0$

(3) $\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = 2i\mathscr{C}$

(解答)

(1)

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathscr{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{B}^2 = &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathscr{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{C}^2 = &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathscr{E} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathscr{A}^2 = \mathscr{B}^2 = \mathscr{C}^2 = \mathscr{E}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \\
&= 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= 2i\mathscr{C} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

[問題 5.6] 次の連立微分方程式を解け。ただし、t=0 において $a_1 = 1$、$a_2 = 0$ とする。

$$\begin{aligned}
i\frac{da_1}{dt} &= \epsilon a_1 + v a_2 \\
i\frac{da_2}{dt} &= v a_1 + \epsilon a_2
\end{aligned}$$

(解答)
両辺に $-i$ を掛けて

$$\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= -i\epsilon a_1 - iv a_2 \\
\frac{da_2}{dt} &= -iv a_1 - i\epsilon a_2
\end{aligned}$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} -i\epsilon & -iv \\ -iv & -i\epsilon \end{pmatrix}$$

と置くと

$$\begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

の形で表すことができ、これの固有値を求める。

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} \lambda + i\epsilon & iv \\ iv & \lambda + i\epsilon \end{pmatrix} &= (\lambda + i\epsilon)^2 + v^2 \\ &= \lambda^2 + 2i\epsilon\lambda - \epsilon^2 + v^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = -i\epsilon \pm \ iv$$

a)$\lambda = -i\epsilon + iv$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} iv & iv \\ iv & iv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$a_1 + a_2 = 0$$

$a_1 = \alpha$ とすれば、$a_2 = -\alpha$
よって

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda = -i\epsilon - iv$ のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -iv & iv \\ iv & -iv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$a_1 - a_2 = 0$$

$a_1 = \beta$ とすれば、$a_2 = \beta$
よって

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上の結果より、対角行列Ｐは

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $\lambda = -i\epsilon \pm \ iv = E_{\pm}$ と置くと、一般解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} \alpha e^{iE_+t} \\ \beta e^{iE_-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha e^{iE_+t} + \beta e^{iE_-t} \\ -\alpha e^{iE_+t} + \beta e^{iE_-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、$t=0$ において $a_1=1$、$a_2=0$ を代入して α と β を定めると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{iE_-t}+e^{iE_+t} \\ e^{iE_-t}-e^{iE_+t} \end{pmatrix}$$

[問題 5.7](1) この変換を行列を用いて表せ。
(2) 逆変換を求めよ。

（解答）
(1)
2 式を並べて書くと

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x-vt) \\ t' &= \gamma(t-\frac{v}{c^2}x) \end{aligned}$$

これを行列を用いて表すために、x、t について分けると、

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x-\gamma vt \\ t' &= -\gamma\frac{v}{c^2}x+\gamma t \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v/c^2 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ &= \gamma\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v/c^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)
逆行列を用いて逆変換を行う。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} &= \gamma\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これを整理して,

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & v \\ \frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

[問題 5.8] 行列

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

を対角化する直行行列を求めよ。

(解答)

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 2 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-2)-4$$
$$= \lambda^2-7\lambda+6$$
$$= (\lambda-6)(\lambda-1)$$
$$= 0$$

$\therefore \lambda = 1, 6$

a) $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$-2x + y = 0$$

$x = \alpha$ とすれば、$y = 2\alpha$ となる。
よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

大きさが 1 になるように規格化すると、

$$\sqrt{x^2+y^2} = \alpha^2 + 4\alpha^2$$
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$x + 2y = 0$$

$x = \beta$ とすれば、$y = -2\beta$ となる。
よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

大きさが 1 になるように規格化すると

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= 4\beta^2+\beta^2 \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上より、この行列を対角化する直交行列は

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[問題 5.9] $(\mathscr{A}\mathscr{B})^t = \mathscr{B}^t\mathscr{A}^t$ を示せ[1]。

(解答) $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$ ともに $n \times n$ 行列とし、左辺と右辺の i, j 部分の要素が互いに等しいことを示すことで証明する。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right)^t \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m1} & \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m2} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{mn} \\ \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m1} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m2} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m1} & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m2} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{mn} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m1} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m1} \\ \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m2} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m2} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{mn} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{mn} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上記の式より、この i,j 要素は $\sum_{m=1}^{n} a_{jm}b_{mi}$ となっている。

[1]数学の定義では行列 $\mathscr{A}$ の転置行列は一般的に ${}^t\mathscr{A}$ で表される。

次に右辺について

$$
\begin{aligned}
（右辺） &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} b_{m1}a_{1m} & \sum_{m=1}^{n} b_{m1}a_{2m} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{m1}a_{nm} \\ \sum_{m=1}^{n} b_{m2}a_{1m} & \sum_{m=1}^{n} b_{m2}a_{2m} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{m2}a_{nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} b_{mn}a_{1m} & \sum_{m=1}^{n} b_{mn}a_{2m} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} b_{mn}a_{nm} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m1} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m1} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m1} \\ \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{m2} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{m2} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{n} a_{1m}b_{mn} & \sum_{m=1}^{n} a_{2m}b_{mn} & \cdots & \sum_{m=1}^{n} a_{nm}b_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

こちらも左辺と同様に i, j の要素が $\sum_{m=1}^{n} a_{jm}b_{mi}$ となっていることが確認された。
よって、(左辺)=(右辺) より

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})^t = \mathscr{B}^t\mathscr{A}^t$$

[問題 5.10] 行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。

(解答)

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\cos\theta^2 + \sin\theta^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

[問題 5.11] 2×2 行列について $\det\mathscr{A}^t$=$\det\mathscr{A}$ を示せ。また、直交行列の行列式の値は± 1 であることを示せ。

(解答)

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \det \mathscr{A} &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc \\ &= ad - cb \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \\ &= \det \mathscr{A}^t \end{aligned}$$

よって、2×2 行列で $\det\mathscr{A}^t = \det\mathscr{A}$ を示せた。

次に、直交行列であるということは、$\mathscr{A}^t\mathscr{A} = \mathscr{E}$($\mathscr{E}$ は n 次の単位行列) を満たすため、この両辺の行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^t\mathscr{A} &= \mathscr{E} \\ \det \mathscr{A}^t \det \mathscr{A} &= \det \mathscr{E} \end{aligned}$$

ここで、$\det\mathscr{A}^t = \det\mathscr{A}$ を用いると

$$\begin{aligned} \det \mathscr{A}^t \det \mathscr{A} &= \det \mathscr{E} \\ (det\mathscr{A})^2 &= 1 \\ \det \mathscr{A} &= \pm 1 \end{aligned}$$

よって、直交行列の行列式の値は± 1 である。

[問題 5.12] 次の行列の固有値を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 5 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

(解答)

(1)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2i \\ -2i & \lambda - 2 \end{pmatrix} &= (\lambda - 5)(\lambda - 2) + (2i)^2 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 6)(\lambda - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \lambda = 1, 6$

(2)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1-i \\ -1+i & \lambda-2 \end{pmatrix} &= (\lambda-2)^2-(-1-i)(-1+i) \\ &= \lambda^2-4\lambda+4-(1-i+i+1) \\ &= \lambda^2-4\lambda+4-2 \\ &= \lambda^2-4\lambda+2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$

(3)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -i \\ i & \lambda-2 \end{pmatrix} &= (\lambda-2)^2+i^2 \\ &= \lambda^2-4\lambda+3 \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore \lambda = 3, 1$

第 6 章

問題 6.1　次の 2 つのベクトルの外積を求めよ。

$$(1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad(2)\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\quad(3)\begin{pmatrix}0\\10\\-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$$

解)

(1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 2\cdot 1\cdot \boldsymbol{i}+3\cdot 3\cdot \boldsymbol{j}+2\cdot 1\cdot \boldsymbol{k}-(2\cdot 3\cdot \boldsymbol{k}+1\cdot 1\cdot \boldsymbol{j}+2\cdot 3\cdot \boldsymbol{i}) \\ &= 2\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}-6\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{i} \\ &= -4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

よって，$\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}$

(2)

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -15\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}-(10\boldsymbol{k}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{i})$$

$$= -13\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}$$

よって，$\begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix}$

(3) $$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 10 & -5 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 20\boldsymbol{i} - 30\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} - (60\boldsymbol{k} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{i})$$
$$= 20\boldsymbol{i} - 30\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{k}$$

よって，$\begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ -60 \end{pmatrix}$

問題 6.2　2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ について次の問に答えよ。

(1) 外積の大きさが $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の作る平行四辺形の面積に等しいことを説明し，次の 2 つのベクトルで作られる平行四辺形の面積を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ であれば，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ が平行であることを証明せよ。

解)

(1) Fig. 20 に示すように，外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさである $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ は，$|\boldsymbol{A}|$ を底辺とすると $|\boldsymbol{B}|\sin\theta$ は高さになるため，外積の大きさは 2 つのベクトルの作る平行四辺形の面積に等しい。

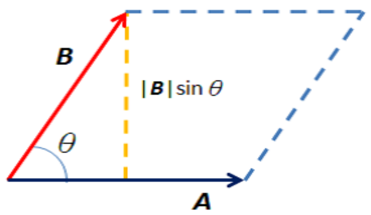

Fig. 20: 外積の大きさ

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ とすると，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ であるため，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$が作る平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ である。

(2) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ より，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ であるためには $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ のどちらかが零ベクトル，または $\sin\theta = 0$ が必要である。$\sin\theta = 0$ となるときは $\theta = 0$，π，$2\pi (n\pi$，n は整数) で，このとき $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は平行である。

問題 6.3　電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する q が受けるローレンツ力は次のように表される (c は光速)。

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right)$$

磁場による力の方向が，フレミングの左手の法則と一致することを説明せよ。

解)

電荷 q の粒子が $\boldsymbol{v}$ で運動することを電流だと考えれば，フレミング左手の法則で得られる力の方向と $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積の方向が一致する。

問題 6.4　3 次元空間に，互いに平行でない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ がある。($\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ はその順に右手系をなすものとする。)

(1) 3 つのベクトルのつくる平行六面体の体積が，$v = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_3 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1)$ で与えられることを示せ。

(2) 次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ を定義する。

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{v}(\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3), \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{v}(\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1), \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{2\pi}{v}(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)$$

このとき

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$$

が成り立つことを示せ。

解)

(1) $v = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$ を示す。外積 $\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3$ の大きさは 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ で作られる平行四辺形の面積 (六面体の底辺) に等しい。一方，$\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3$ と $\boldsymbol{a}_1$ の内積をとることは $\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の作る平行四辺形の面積 (底辺) に高さを掛けることに相当するので，3 つのベクトルの作る平行六面体の体積 v は $v = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$ で与えられることがわかる。以下同様の議論により，$v = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_3 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_1)$ が得られる。

(2) $i \neq j$ のときは $\boldsymbol{a}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ であるため $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 0$ 。一方，$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 = (2\pi/v)\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3) = 2\pi$ のように $i = j$ のときは $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi$ であるため，$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = 2\pi\delta_{ij}$ が成り立つ。

問題 6.5　地球の自転の角速度ベクトルは，南極から北極に向いたベクトルと考えてよい。

(1) 地表に対して，北向きの水平な $\boldsymbol{v}'$ をもつ物体が受けるコリオリ力の向きを示せ。

(2) ある高さの所から落下する物体が地表に到達する点は，鉛直真下の点よりずれる。このことを物理的に説明し，北半球と南半球においてそのずれる向きを示せ。

解)

(1) Fig.21 の (a) に示すように，北半球では進行方向に対して右向き，南半球では進行方向に対して左向きにコリオリ力がはたらく。

(2) Fig.21 の (b) に示すように，落下する物体に対してコリオリ力はいずれも東向きにはたらく。そのため，落下する物体が地表に到達する地点は鉛直真下の点より東向きにずれる。

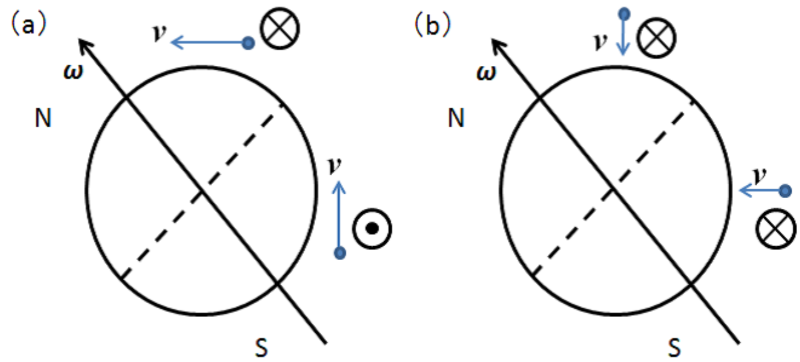

Fig. 21: コリオリ力の向き

問題 6.6　点 (x, y, z) を速度 (の成分)v_x, v_y, v_z で運動する質量 m の質点の角運動量を求めよ。
解)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\
&= (y \cdot mv_z - z \cdot mv_y,\ z \cdot mv_x - y \cdot mv_z,\ x \cdot mv_y - y \cdot mv_x) \\
&= m \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 6.7　角運動量が一定に保たれる場合，運動は平面内に限られることを示せ。
解)

角運動量が一定の場合

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ。問題 6.6 で得られた角運動量の表式を用いて計算すると

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{l} = m\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - yv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt}v_z + y\frac{dv_z}{dt} - \frac{dz}{dt}v_y - z\frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dz}{dt}v_x + z\frac{dv_x}{dt} - \frac{dx}{dt}v_z - x\frac{dv_z}{dt} \\ \frac{dx}{dt}v_y + x\frac{dv_y}{dt} - \frac{dy}{dt}v_x - y\frac{dv_x}{dt} \end{pmatrix}
$$

$$
= m \begin{pmatrix} v_y v_z + ya_z - v_z v_y - za_y \\ v_z v_x + za_x - v_x v_z - xa_z \\ v_x v_y + xa_y - v_y v_x - ya_x \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} ya_z - za_y \\ za_x - xa_z \\ xa_y - ya_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}
$$

この関係から位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と外力 $\boldsymbol{F}$ は平行である。したがって，角運動量が一定に保たれる場合には運動は平面内に限られる。また，位置ベクトルと角運動量は直交しているため，運動は初期条件における角運動量に垂直な平面に限られることがわかる。

問題 6.8　次の二重積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{e^x} y\, dxdy$

(2) $\displaystyle\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} dxdy$

(3) $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\int_{y=-1}^{1} 3x\, dxdy$

解)

(1)
$$
\begin{aligned}
\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{e^x} y\, dxdy &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{2x} - x^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

(2)
$$\int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{2} dxdy = \int_0^2 [\,x\,]_y^2\, dy = \int_0^2 (2 - y)\ dy = \left[2y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = (4 - 2 - 0) = 2$$

(3)
$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=-1}^{1} 3x\, dxdy = \int_0^1 3x\, dx \int_{-1}^{1} dy = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 [\,y\,]_{-1}^1 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

問題 6.9　与えられた領域における次の二重積分を求めよ。

(1)

$$\iint xy\, dxdy \qquad (0 \le x, y \le 1\ , y \le x)$$

(2) $$\iint (x^2 + y^2)\, dxdy \qquad (0 \le x, y \le 1)$$

(3) $$\iint e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy \qquad (0 \le x, y \le \infty)$$

解)

(1) $$\iint xy\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, xy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x y\, dy\, x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^x x\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3\, dx = \left[\frac{1}{2\cdot 4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

(2) $$\iint (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 x^2 + \frac{1}{3}\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

(3) $$\iint e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{より}$$

3 次元極座標のヤコビヤン

天頂角を θ，方位角を ϕ とする。x，y，z を 3 次元極座標で表わすと $x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$，$z = r\cos\theta$ となる。このとき，ヤコビヤン J は

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\sin^2\theta\sin^2\phi - (-r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi - r^2\sin\theta\sin^2\theta\cos^2\phi)$$

$$= r^2\sin\theta\cos^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + r^2\sin\theta\sin^2\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = r^2\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= r^2\sin\theta$$

問題 6.10　次の三重積分を求めよ。

(1) $$\iiint dxdydz \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \le 1)$$

(2) $$\iiint (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz \qquad (0 \le x, y, z \le 1)$$

(3) $$\iiint (x^2 + y^2)\, dxdydz \qquad (x^2 + y^2 + z^2 \le a^2)$$

解)

(1) $$\iiint dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^1 r^2\, dr$$

$$= \Big[\ \phi\ \Big]_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 = 2\pi\cdot(1-(-1))\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

(2)

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3+xy^2+xz^2\right]_0^1 dydz$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y^2+z^2\right) dydz = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}y^3+yz^2\right]_0^1 dz$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}+z^2\right) dz = \left[\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$$

(3)
$$\iiint (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\sin^2\theta\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^4\,dr \int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^a \left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin\theta-\sin\theta\cos 2\theta)\,d\theta\right)$$
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin 3\theta-\sin\theta)\,d\theta\right)$$
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\left(\frac{3}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 3\theta\,d\theta\right)$$
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\left(\left[-\frac{3}{4}\cos\theta\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2\pi a^5}{5}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{15}a^5$$

問題 6.11　一定の角速度 ω_0 で中心を通る軸の周りを回転している半径 R，質量 M の円板がある。周囲に接線方向の一定の大きさの力 F を加えてブレーキをかける。このとき円板の角速度の時間依存性を求め，円板が静止するまでの時間を求めよ。また半径 R，質量 M の円輪をこの円板に付けると，静止するまでの時間はいくらになるか。

解)

運動方程式
$$I\frac{d\omega}{dt} = -FR$$
を解く。両辺を t で積分して
$$\omega(t) = -\frac{FR}{I}t + C_1 \qquad C_1\text{は積分定数}$$
$\omega(0) = \omega_0$ より
$$\omega(t) = -\frac{FR}{I}t + \omega_0$$
したがって，$\omega(t) = 0$ になるまでの時間 Δt は，$-(FR/I)\Delta t + \omega_0 = 0$ より
$$\Delta t = \frac{\omega_0 I}{FR}$$
と慣性モーメントに比例する。円輪をつける前の円板の慣性モーメント I は $\rho = M/\pi R^2$ に注意して
$$I = \iint \rho(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^3\,drd\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3\,drd\theta$$
$$= \frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R = \frac{MR^2}{2}$$
となり，円板が静止するまでの時間は

$$\Delta t = \frac{\omega_0}{FR} \cdot \frac{MR^2}{2} = \frac{\omega_0 MR}{2F}$$

となる。また，円輪を付けたときの慣性モーメント I' は円板の慣性モーメントを I_0，円輪の慣性モーメントを I_1 とすると

$$I' = I_0 + I_1$$

となる。したがって，円輪の慣性モーメント $I_1 = MR^2$ より静止するまでの時間 $\Delta t'$ は

$$\Delta t' = \frac{\omega_0}{FR} \cdot \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2 \right) = \frac{3\omega_0 MR}{2F}$$

となる。

問題 6.12　次の積分を求めよ。

(1) $$\iint e^{-\beta(x^2+y^2)}\, dxdy \qquad (-\infty \le x, y \le \infty)$$

(2) $$\iiint e^{-\beta(x^2+y^2+z^2)}\, dxdydz \qquad (-\infty \le x,\ y,\ z \le \infty)$$

解)

(1) $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ と置くと x，y の積分範囲は r，θ を使って $0 \le r \le \infty$，$0 \le \theta \le 2\pi$ となり，ヤコビヤン J は

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

となるので

$$\iint e^{-\beta(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\beta r^2}\ Jdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\beta r^2}\ drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{-2\beta} e^{-\beta r^2} \right)' dr = 2\pi \left[\frac{1}{-2\beta} e^{-\beta r^2} \right]_0^{\infty}$$

$$= 0 - \left(\frac{2\pi}{-2\beta} \right) = \frac{\pi}{\beta}$$

(2) (1) より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta y^2}\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \right)^2 = \frac{\pi}{\beta}$$

よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x^2+y^2+z^2)}\, dxdydz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta y^2}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta z^2}\, dz$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\, dx \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \right)^3 = \left(\frac{\pi}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}}$$

問題 6.13　次の積分を求めよ。

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2\ \exp\left(-\frac{|\ t_1 - t_2\ |}{\tau} \right)$$

解)

$t_1 > t_2$ と $t_2 > t_1$ で積分を分けると

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2\ \exp\left(-\frac{|\ t_1 - t_2\ |}{\tau}\right)$$

$$= \int_{t_1=0}^{t_1=t} dt_1 \int_{t_2=0}^{t_2=t_1} dt_2 \exp\left(-\frac{t_1 - t_2}{\tau}\right) + \int_{t_2=0}^{t_2=t} dt_2 \int_{t_1=0}^{t_1=t_2} dt_1 \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right)$$

$$= \int_{t_1=0}^{t_1=t} dt_1 \left[\tau \exp\left(-\frac{t_1 - t_2}{\tau}\right)\right]_{t_2=0}^{t_2=t_1} + \int_{t_2=0}^{t_2=t} dt_2 \left[\tau \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right)\right]_{t_1=0}^{t_1=t_2}$$

$$= \int_{t_1=0}^{t_1=t} dt_1 \tau \left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) + \int_{t_2=0}^{t_2=t} dt_2 \tau \left(1 - e^{-t_2/\tau}\right)$$

$$= \left[\tau\left(t_1 + \tau e^{-t_1/\tau}\right)\right]_{t_1=0}^{t_1=t} + \left[\tau\left(t_2 + \tau e^{-t_2/\tau}\right)\right]_{t_2=0}^{t_2=t}$$

$$= 2\left[\tau t - \tau^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]$$

問題 6.14　密度 ρ，質量 M のある物体の z 軸に関する慣性モーメント

$$I = \iiint \rho(x^2 + y^2)\ dxdydz$$

と，z 軸に平行な重心を通る軸に関する慣性モーメント

$$I_G = \iiint \rho\left[(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2\right]\ dxdydz$$

の差は Mh^2 であることを示せ (平行軸の定理)。ただし，h は 2 つの軸の間の距離 $h = \sqrt{x_G{}^2 + y_G{}^2}$ であり，重心の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{1}{M}\iiint \rho \boldsymbol{r}\ dxdydz$$

質量は

$$M = \iiint \rho\ dxdydz$$

で与えられる。

解)

重心からの x の位置を x'，y の位置を y' とすると x，y はそれぞれ $x = x_G + x'$，$y = y_G + y'$ と表せる。したがって

$$I = \iiint \rho(x^2 + y^2)\ dxdydz = \iiint \rho\left[(x_G + x')^2 + (y_G + y')^2\right]\ dx'dy'dz'$$

$$= \iiint \rho(x_G{}^2 + y_G{}^2)\ dx'dy'dz' + 2\iiint \rho(x_G x' + y_G y')\ dx'dy'dz' + \iiint \rho(x'^2 + y'^2)\ dx'dy'dz'$$

ここで第 3 項は重心を通る軸に関する慣性モーメントであるので，I_G である。したがって

$$= h^2 \iiint \rho\ dx'dy'dz' + 2\iiint \rho(x_G x' + y_G y')\ dx'dy'dz' + I_G$$

ここで，変数を 3 次元極座標に変換する。つまり，x'，y'，z' を $x' = r\sin\theta\cos\phi$，$y' = r\sin\theta\sin\phi$，$z' = \cos\theta$ のように変換する。このような変数変換をして計算すると

$$= Mh^2 + 2\iiint \rho(x_G r\sin\theta\cos\phi + y_G r\sin\theta\sin\phi)\ r^2\sin\theta drd\theta d\phi + I_G$$

$$= Mh^2 + 2\iint \rho r^3\sin^2\theta\left\{x_G\Big[\sin\phi\Big]_0^{2\pi} + y_G\Big[-\cos\phi\Big]_0^{2\pi}\right\} drd\theta + I_G$$

$$= Mh^2 + I_G$$

よって I と I_G との差が Mh^2 となること (平行軸の定理) が示された。

問題 6.15　次の物体の指定された軸に関する慣性モーメントを求めよ。

(1) 質量 M，半径 R の円板の直径を含む軸

(2) 質量 M，2 辺の長さが a，b の矩形板[2]の，面の中心を通り，面に垂直な軸

(3) 質量 M，2 辺の長さが a，b の矩形板の，面内にある対称軸

解)

(1) この場合の慣性モーメントは，y 軸を回転軸として次のように表わせる。

$$I = \iint \rho x^2\, dxdy$$

変数を極座標に変換すると

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho r^2 \cos^2\theta r\, drd\theta = \rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$= \rho\frac{R^4}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \rho\frac{\pi R^4}{4}$$

ここで ρ は

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$

より，慣性モーメントは

$$I = \frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^4}{4} = M\frac{R^2}{4}$$

(2) 回転軸を z 軸にとる。慣性モーメント I は

$$I = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\rho(x^2+y^2)\, dxdy = \int_{-b/2}^{b/2}\rho\left[\frac{1}{3}x^3+y^2x\right]_{-a/2}^{a/2} dy$$
$$= \int_{-b/2}^{b/2}\rho\left(\frac{a^3}{12}+ay^2\right) dy = \rho\left[\frac{a^3}{12}y+\frac{1}{3}y^3\right]_{-b/2}^{b/2} = \rho\left(\frac{a^3b}{12}+\frac{ab^3}{12}\right)$$

ここで ρ は

$$\rho = \frac{M}{ab}$$

より，慣性モーメントは

$$I = \frac{M}{ab}\left(\frac{a^3b}{12}+\frac{ab^3}{12}\right) = M\frac{a^2+b^3}{12}$$

(3) 対称軸の取り方によって 2 つの慣性モーメントが求められる。回転軸を y 軸として考えると

$$I_1 = \int_0^b\int_{-a/2}^{a/2}\rho x^2\, dxdy \qquad \text{または} \qquad I_2 = \int_0^a\int_{-b/2}^{b/2}\rho x^2\, dxdy$$

これはただ積分範囲の a と b を取り替えただけなので，I_1 の計算だけ示す。

$$I_1 = \int_0^b\int_{-a/2}^{a/2}\rho x^2\, dxdy = \int_0^b \rho\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a/2}^{a/2} dy = \int_0^b \rho\frac{a^3}{12}\, dy = \rho\left[\frac{a^3}{12}y\right]_0^b = \rho\frac{a^3b}{12}$$

ρ は (2) と同じであるため，

$$I_1 = \frac{M}{ab}\cdot\frac{a^3b}{12} = M\frac{a^2}{12}$$

同様に I_2 は

$$I_2 = M\frac{b^2}{12}$$

となる。

[2]長方形のこと。

問題 6.16　重さの無視できる細い針金 (長さ l) の 1 つの端に，重い球 (質量 M，半径 a) を取り付けた振り子をボルダの振り子という。球の付いてない端を通り，振り子に垂直な軸に関する振り子の慣性モーメントが

$$I = M\left[(l+a)^2 + \frac{2}{5}a^2\right]$$

で与えられることを示せ。

解)

球の中心 (重心) を通る軸に対する慣性モーメント I_G は，6.10(3) の結果を利用して

$$I_G = \iiint \rho(x^2 + y^2)\, dxdydz = \rho\frac{8\pi}{15}a^5$$

ここで，ρ は

$$\rho = \frac{3M}{4\pi a^3}$$

より，慣性モーメント I_G は

$$I_G = \frac{3M}{4\pi a^3}\cdot\frac{8\pi}{15}a^5 = \frac{2M}{5}a^2$$

ここで，平行軸の定理を適用すると求めるべき慣性モーメント I は $h = l + a$ に注意して

$$I = I_G + Mh^2 = \frac{2M}{5}a^2 + M(l+a)^2 = M\left[(l+a)^2 + \frac{2}{5}a^2\right]$$

問題 6.17　ある固定点の周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する剛体の角運動量 $\boldsymbol{L}$ が

$$\boldsymbol{L} = \iiint \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\times(\omega\times\boldsymbol{r})\, dxdydz$$

で与えられることを説明せよ。

また慣性テンソル

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

ただし

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)\,\rho(\boldsymbol{r})\, dxdydz, \qquad I_{xy} = -\iiint xy\,\rho(\boldsymbol{r})\, dxdydz$$

などを定義すると

$$\boldsymbol{L} = \jmath\omega$$

と表されることを示せ。I_{xx} は x 軸に関する慣性モーメント，I_{xy} は x，y 軸に関する慣性乗積と呼ばれる。

解)

回転座標系の位置ベクトルと速度を $\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{v}'$ とすると角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

$$= \boldsymbol{r}'\times m(\boldsymbol{v}' + \omega\times\boldsymbol{r}')$$

質量 m を密度関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ を使って表わし，$\boldsymbol{v}'$ が

$$\boldsymbol{v}' = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}'$$

であることに注意すると

$$\boldsymbol{L} = \iiint \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}'\times(\omega\times\boldsymbol{r}')\, dxdydz$$

となる。改めて $\boldsymbol{r}'$ を $\boldsymbol{r}$ と書きなおすと

$$\boldsymbol{L} = \iiint \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\, dxdydz$$

と表わすことができる。このように表わした角運動量 $\boldsymbol{L}$ の x 成分を書き表してみると (ただ単に外積の計算のみなので省略する)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_x} &= \iiint \rho(\boldsymbol{r})(y^2 + z^2)\, dxdydz \cdot \omega_x - \iiint \rho(\boldsymbol{r})xy\, dxdydz \cdot \omega_y - \iiint \rho(\boldsymbol{r})xz\, dxdydz \cdot \omega_z \\ &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \end{aligned}$$

これを y 軸，z 軸についても計算すると，慣性テンソル $\mathcal{J}$ を使って $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \mathcal{J}\boldsymbol{\omega}$$

と表わせることがわかる。

第 7 章

[問題 7.1] 次のベクトルの発散と回転を求めよ.

(1) $\boldsymbol{V} = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ (2) $\boldsymbol{V} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

(3) $\boldsymbol{V} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ (4) $\boldsymbol{V} = x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$

(5) $\boldsymbol{V} = x\cos y\boldsymbol{i} + \sin y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ (6) $\boldsymbol{V} = \sinh z\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} + y\cosh z\boldsymbol{k}$

解)

(1)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{V} &= 0 + 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{V} &= (0-0)\boldsymbol{i} + (1-1)\boldsymbol{j} + (0-0)\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{V} &= 2x + 2y + 2z \\ &= 2(x + y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{V} &= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (0-0)\boldsymbol{k} \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{V} &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} &= (0-1)\boldsymbol{i} + (0-1)\boldsymbol{j} + (0-1)\boldsymbol{k} \\
&= -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} &= 2xy + 2xy + xy \\
&= 5xy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} &= (xz-0)\boldsymbol{i} + (0-yz)\boldsymbol{j} + \left(y^2 - x^2\right)\boldsymbol{k} \\
&= xz\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + \left(y^2 - x^2\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} &= \cos y + \cos y \\
&= 2\cos y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} &= (x-0)\boldsymbol{i} + (0-y)\boldsymbol{j} + \{0 - (-x\sin y)\}\boldsymbol{k} \\
&= x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + x\sin y\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} &= 0 + 2x + y\sinh z \\
&= 2x + y\sinh z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} &= (\cosh z - 0)\boldsymbol{i} + (\cosh z - 0)\boldsymbol{j} + (2y - 0)\boldsymbol{k} \\
&= \cosh z\boldsymbol{i} + \cosh z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

[問題 7.2] $\boldsymbol{V} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ として, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}$ を求めよ. 閉じた体積 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ について $\displaystyle\iint_{\text{表面全体}} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$を求め, 発散定理を確かめよ.
($\boldsymbol{n}$は表面の各点における法線方向外向きの単位ベクトル)
解)

$$
\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 1 + 1 + 1 = 3
$$

半球面上の点における法線は $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ として

$$
\mathrm{grad}\,\phi = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}
$$

$$
|\,\mathrm{grad}\,\phi\,| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2
$$

$$
\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{grad}\,\phi}{|\,\mathrm{grad}\,\phi\,|} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}
$$

面要素 $d\sigma$ は

$$d\sigma = \frac{1}{\cos\gamma}dxdy$$

また, $\cos\gamma = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = z$ より, $d\sigma = \frac{1}{z}dxdy$ であるから

$$\iint \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2+y^2+z^2}{z}dxdy$$

この式は $x,\ y$ に関して偶関数なので

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2+y^2+z^2}{z}dxdy = 2\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2+y^2+z^2}{z}dxdy$$

極座標変換を行い, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ として

$$\begin{aligned}
\iint \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma &= 2\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta \\
&= 4\pi\int_{0}^{1}\left\{-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\right\}' dr \\
&= 4\pi\left[-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}dv &= \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 3dz\right)dy\right\}dx \\
&= 6\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dydx
\end{aligned}$$

ここで極座標変換を行う. $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると

$$6\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta$$

また,

$$\begin{aligned}
\left\{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' &= \frac{3}{2}\cdot(-2r)(1-r^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= -3r(1-r^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

である. これを用いると

$$\begin{aligned}
6\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} \sqrt{1-r^2}\cdot rdrd\theta &= 12\pi\int_{0}^{1}\left\{-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' dr \\
&= 12\pi\left[\left\{-\frac{1}{3}(1-1)^{\frac{3}{2}}\right\} - \left\{-\frac{1}{3}(1-0)^{\frac{3}{2}}\right\}\right] \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

以上より発散定理が確かめられた.

[問題 7.3]$\boldsymbol{V} = x\cos^2 y\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + z\sin^2 y\boldsymbol{k}$として, 半径 1 の球の表面について

$$\iint \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

を求めよ. ($\boldsymbol{n}$ は表面の各点における法線方向外向きの単位ベクトル)
解)

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = \cos^2 y + \sin^2 y = 1$, ガウスの発散定理より

$$\begin{aligned}\iint \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma &= \iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}dxdydz \\ &= \iiint dxdydz\end{aligned}$$

ここで三次元極座標変換を行う. $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ とおくと, ヤコビアンは

$$\begin{aligned}J &= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta \\ &= r^2\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2dr \\ &= 2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

[問題 7.4] 原点を中心とする半径 2 の球内において

$$\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{V}dxdydz$$

を求めよ. ただし

$$\boldsymbol{V} = (x^2+y^2+z^2)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

とする.
解)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \left(x^2+y^2+z^2\right)(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) \\ &= \left(x^3+y^2x+z^2x\right)\boldsymbol{i} + \left(x^2y+y^3+z^2y\right)\boldsymbol{j} + \left(x^2z+y^2z+z^3\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 5\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}dxdydz = 5\iiint\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

ここで三次元極座標変換を行う． $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ とおくと, ヤコビアンは $J = r^2\sin\theta$ となり

$$
\begin{aligned}
5\iiint\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz &= 5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} r^2\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= 5\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2} r^4 dr \\
&= 5\cdot 2\pi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \\
&= 128\pi
\end{aligned}
$$

[問題 7.5] 発散定理を用いて, 次のグリーンの定理を導け.

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\text{体積全体}}\left(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\nabla\psi\right)d\tau &= \iint_{\text{表面全体}}(\phi\nabla\psi)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma \\
\iiint_{\text{体積全体}}\left(\phi\nabla^2\psi-\phi\nabla^2\psi\right)d\tau &= \iint_{\text{表面全体}}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\cdot\boldsymbol{n}d\sigma
\end{aligned}
$$

解)

$\phi\nabla\psi = \boldsymbol{V}$ とおくと, 上の式はガウスの発散定理より

$$
\begin{aligned}
\iint_{\text{表面全体}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma &= \iiint_{\text{体積全体}}\nabla\cdot\boldsymbol{V}d\tau \\
&= \iiint_{\text{体積全体}}\left(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\nabla\psi\right)\tau
\end{aligned}
$$

次に下の式は $\psi\nabla\phi = \boldsymbol{V}'$ とおいて上式より引くと

$$
\begin{aligned}
\iint_{\text{表面全体}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma-\iint_{\text{表面全体}}\boldsymbol{V}'\cdot\boldsymbol{n}d\sigma &= \iiint_{\text{体積全体}}\nabla\cdot\boldsymbol{V}d\tau-\iiint_{\text{体積全体}}\nabla\cdot\boldsymbol{V}'d\tau \\
&= \iiint_{\text{体積全体}}\left(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\nabla\psi-\psi\nabla^2\phi-\nabla\psi\nabla\phi\right)d\tau \\
&= \iiint_{\text{体積全体}}\left(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi\right)d\tau
\end{aligned}
$$

[問題 7.6] $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のベクトルポテンシャルであれば, $\phi(\boldsymbol{r})$ を任意の関数として, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\mathrm{grad}\phi(\boldsymbol{r})$ も $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のベクトルポテンシャルとなることを示せ.

解)

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のポテンシャルということは

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))$$

が成り立つ. ここで, $\psi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\psi(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}))\\ &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\psi\,(\boldsymbol{r})) &= \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{r}))\\ &= 0\end{aligned}$$

よって $\psi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ は $\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\psi$ を満たすのでベクトルポテンシャル.

[問題 7.7] 次の場がソレノイド場であることを示し, そのベクトルポテンシャルを求めよ. (解は一通りでないことに注意.)
(1) $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{k}$ (F は定数)
(2) $\boldsymbol{F} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{i} + (2zy - x^2)\boldsymbol{j} - (2xz + z^2)\boldsymbol{k}$
(3) $\boldsymbol{F} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$
解)

(1)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} &= 0 + 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

より$\boldsymbol{F}$はソレノイド場. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ より

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{k} = F\boldsymbol{k}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = F$$

よって

$$\boldsymbol{A} = xF\boldsymbol{j}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} &= 2x + 2z - 2x - 2z\\ &= 0\end{aligned}$$

より$\boldsymbol{F}$はソレノイド場. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ より

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{k} = \left(x^2 - y^2\right)\boldsymbol{i} + \left(2zy - x^2\right)\boldsymbol{j} - \left(2xz + z^2\right)\boldsymbol{k}$$

上式から, $\boldsymbol{i}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) = \left(x^2 - y^2\right)$$

より

$$A_z = yx^2 \ \ , \ \ A_y = zy^2$$

または

$$A_z = -\frac{1}{3}y^3 \ \ , \ \ A_y = -x^2 z$$

$\boldsymbol{j}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) = \left(2zy - x^2\right)$$

より

$$A_x = z^2 y \ \ , \ \ A_z = \frac{1}{3}x^3$$

または

$$A_x = -\frac{1}{3}x^3 \ \ , \ \ A_z = -2xzy$$

$\boldsymbol{k}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) = -\left(2xz + z^2\right)$$

より

$$A_y = -x^2 z \ \ , \ \ A_x = yz^2$$

または

$$A_y = -xz^2 \ \ , \ \ A_x = 2yxz$$

とおけば成り立つ. 以上の解より適切なものを組み合わせて整理すると

$$\boldsymbol{A} = z^2 y\boldsymbol{i} - x^2 z\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}\left(x^3 - y^3\right)\boldsymbol{k}$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\boldsymbol{F} &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

より $\boldsymbol{F}$ はソレノイド場. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ より

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{k} = (y+z)\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} - (x+y)\boldsymbol{k}$$

より, $\boldsymbol{i}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) = (y+z)$$

より

$$A_z = \frac{1}{2}y^2 \ \ , \ \ A_y = -\frac{1}{2}z^2$$

または

$$A_z = yz \ \ , \ \ A_y = -yz$$

$\boldsymbol{j}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) = (x+z)$$

より

$$A_x = xz \ \ , \ \ A_z = -xz$$

または

$$A_x = \frac{1}{2}z^2 \ \ , \ \ A_z = -\frac{1}{2}x^2$$

$\boldsymbol{k}$ 成分については

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) = -(x+y)$$

より

$$A_y = \frac{1}{2}x^2 \ , \ A_x = -\frac{1}{2}y^2$$

または

$$A_y = xy \ , \ A_x = -xy$$

とおけば成り立つ. 以上の解より適切なものを組み合わせて整理すると

$$\boldsymbol{A} = x(z-y)\boldsymbol{i} + y(x-z)\boldsymbol{j} + z(y-x)\boldsymbol{k}$$

[問題 7.8] $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と表されるとき,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = 0$$

であることを示せ.
解)

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

div $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

[問題 7.9] 二つの物理量$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$が,

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

により, ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$とスカラーポテンシャルϕとに関係付けられている. この関係は, 変換

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \nabla\Lambda,\ \phi = \phi' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

に関して不変であることを示せ. ただし, Λ は任意のスカラー関数である.
解)

$\nabla\times(\nabla\Lambda) = 0$ を用いる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \nabla\times(\boldsymbol{A}' - \nabla\Lambda) \\
&= \nabla\times\boldsymbol{A}' - \nabla\times(\nabla\Lambda) \\
&= \nabla\times\boldsymbol{A}'
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla\left(\phi' + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}' - \nabla\Lambda) \\ &= -\nabla\phi' - \nabla\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}' + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda)\end{aligned}$$

ここで, 微分の順番は入れ替えても問題ないので

$$\nabla\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda)$$

よって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= -\nabla\phi' - \nabla\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}' + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) \\ &= -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}'\end{aligned}$$

[問題 7.10] ベクトル $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$において
(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ.
(2) xy 面内の長方形の領域 $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$ において

$$\iint (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma$$

を計算せよ. $\boldsymbol{n}$ は z 軸方向, 正の向きの単位ベクトル.
(3) 長方形領域の周囲を反時計回りに回る経路について

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ. 上の結果と比較して, ストークスの定理が成り立つことを示せ.
解)

(1)

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k} \\ &= 2y\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

(2)

$$\iint (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma = \iint 2y\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\frac{1}{\cos\theta}dxdy$$

ここで, θ は面の法線が z 軸となす角度なので, $\cos\theta = 1$. よって

$$\begin{aligned}\iint 2y\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\frac{1}{\cos\theta}dxdy &= \iint 2ydxdy \\ &= ab^2\end{aligned}$$

(3)

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

x 成分, y 成分に分けて長方形のそれぞれの辺について微分すると

$y = 0$, x が 0 から a へ向かう辺は

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

$x = a$, y が 0 から b へ向かう辺は

$$\begin{aligned}\int_0^b 2xydy &= \int_0^b 2aydy \\ &= ab^2\end{aligned}$$

$y = b$, x が a から 0 へ向かう辺は

$$\int_a^0 x^2 dx = -\frac{1}{3}a^3$$

$x = 0$, y が b から 0 へ向かう辺は

$$\begin{aligned}\int_b^0 2xydy &= \int_b^0 2 \cdot 0ydy \\ &= 0\end{aligned}$$

これらを足し合わせると

$$\frac{1}{3}a^3 + ab^2 - \frac{1}{3}a^3 + 0 = ab^2$$

[問題 7.11]$\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ のとき,

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \quad (C \text{ は円周 } x^2 + y^2 = 1,\ \text{反時計回り})$$

を求めよ.

解)

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} d\sigma \\ &= \iint_S (-2)\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} d\sigma \\ &= -2 \iint_S d\sigma\end{aligned}$$

ここで極座標変換を行う. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とすると, ヤコビアンより $d\sigma = rdrd\theta$ なので

$$\begin{aligned}-2\iint_S d\sigma &= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta \\ &= -4\pi\int_0^1 rdr \\ &= -4\pi\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

第 8 章

［問題 8.1］フェルマーの原理を用いて、光が一様な媒質中では直進することを示せ。
解）
教科書 p.89 の式 (8. 0.-267) より

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{n}{c}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{n}{c}\sqrt{1+y'^2}=0 \tag{8.10}$$

ここで、媒質が一様なことから屈折率 n は x、y の変化に関わりなく一定だから左辺第二項目はゼロとなり

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{n}{c}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

両辺を x について積分すると

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}} = C \ \ (C: \text{任意定数})$$

（n/c は定数に吸収させた。）次に y' について解いていく。

$$\begin{aligned}
y' &= C\sqrt{1+y'^2} \\
y'^2 &= C^2(1+y'^2) \iff (1+C^2)y'^2 = C^2 \iff y'^2 = \frac{C^2}{1-C^2} \\
\therefore\ y' &= \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = D \ \ (D: \text{任意定数})
\end{aligned}$$

よって $y' =$ 一定。$y' = dy/dx$ より傾きが一定だから光が一様な媒質中では直進する。

［問題 8.2］次の積分が極値をもつように関数 $y(x)$ を決定せよ。

$$(1)\ \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}dx \quad (2)\ \int_{x_1}^{x_2}x\sqrt{1-y'^2}dx \quad \left(\text{ヒント}: \int\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{c}\right)$$

解）
(1)

$$L(x,y,y') = \sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}$$

とおくと

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y' = \frac{\sqrt{x}y'}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{1.2}$$

式 (1.1)、式 (1.2) をオイラーの方程式（8.16）に代入して

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{x}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

両辺を x について積分すると

$$\frac{\sqrt{x}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = a \ \ (a : 任意定数)$$

次に y' について解いていく。

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}y' &= a\sqrt{1+y'^2} \\
xy'^2 &= a^2(1+y'^2) \iff (x-a^2)y'^2 = a^2 \iff y'^2 = \frac{a^2}{x-a^2} \\
\therefore\ y' &= \frac{a}{\sqrt{x-a^2}}
\end{aligned}$$

両辺を x について積分して

$$y = \int \frac{a}{\sqrt{x-a^2}}dx = 2a\sqrt{x-a^2} + b \ \ (b : 任意定数) \cdots （答）$$

(2)

$$L(x,y,y') = x\sqrt{1-y'^2}$$

とおくと

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = x \cdot \frac{1}{2}(1-y'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y') = -\frac{xy'}{\sqrt{1-y'^2}} \tag{1.-4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{1.-3}$$

式 (1.-4)、式 (1.-3) をオイラーの方程式 (8.16) に代入して

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{xy'}{\sqrt{1-y'^2}}\right) = 0$$

両辺を x について積分すると

$$-\frac{xy'}{\sqrt{1-y'^2}} = C \ \ (C : 任意定数)$$

次に y' について解いていく。

$$\begin{aligned}
-xy' &= C\sqrt{1-y'^2} \\
x^2y'^2 &= C^2(1-y'^2) \iff (x^2+C^2)y'^2 = C^2 \iff y' = \frac{C^2}{x^2+C^2} \\
\therefore\ y' &= \frac{C}{\sqrt{x^2+C^2}}
\end{aligned}$$

両辺を x について積分する。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}dx = \sinh^{-1}\frac{x}{c}$$

より

$$y = \int \frac{C}{\sqrt{x^2+C^2}}dx = C\sinh^{-1}\frac{x}{C} + D \ \ (D : 任意定数)$$

これを式変形して

$$y = C\sinh^{-1}\frac{x}{C} + D \iff \frac{y}{C} - \frac{D}{C} = \sinh^{-1}\frac{x}{C} \iff \frac{x}{C} = \sinh\left(\frac{y}{C} - \frac{D}{C}\right)$$

$1/C = a$、$-D/C = b$ とおくと

$$ax = \sinh(ay + b) \cdots \text{（答）}$$

［問題 8.3］$L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$ に対して、

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \theta, \dot{\theta})dt$$

を極値とする $\theta(t)$ の満たす方程式を求めよ。

解）

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl\sin\theta \end{aligned}$$

より、オイラーの方程式 (8.16) に代入して

$$\frac{d}{dt}ml^2\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \cdots \text{（答）}$$

［問題 8.4］xy 面内の二つの点 $P_1 = (-1, 1)$、$P_2 = (1, 1)$ を結ぶ任意の曲線を考える。この曲線を x 軸の周りに回転させてできる面積

$$S = \int 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int 2\pi y\sqrt{1 + x'^2}dy$$

を最小にする曲線を求めよ。

$$\left(\text{ヒント：この場合のオイラー方程式は}\quad \frac{d}{dy}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad\text{である。また}\quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2 - c^2}}dx = \cosh^{-1}\frac{x}{c}\right)$$

解）

$$F(y, x, x') = 2\pi y\sqrt{1 + x'^2}$$

とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = 4\pi y(1 + x'^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x' = \frac{4\pi y x'}{\sqrt{1 + x'^2}} \tag{1.-19}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{1.-18}$$

式 (1.-19) と式 (1.-18) をオイラーの方程式に代入すると

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{4\pi y x'}{\sqrt{1 + x'^2}}\right) = 0$$

となる。両辺を y について積分して

$$\frac{4\pi y x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = C_1' \quad (C_1' : \text{任意定数})$$

次に x' について解いていく。

$$\begin{aligned} yx' &= C_1\sqrt{1+x'^2} \quad (C_1 = C_1'/4\pi : \text{任意定数}) \\ y^2x'^2 &= C_1^2(1+x'^2) \iff (y^2-C_1^2)x'^2 = C_1^2 \iff x'^2 = \frac{C_1^2}{y^2-C_1^2} \\ \therefore\ x' &= \frac{C_1}{\sqrt{y^2-C_1^2}} \end{aligned}$$

両辺を y について積分する。ここで

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-c^2}}dx = \cosh^{-1}\frac{x}{c}$$

より

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{y^2-C_1^2}}dy = \cosh^{-1}\frac{y}{C_1} + C_2 \quad (C_2 : \text{任意定数})$$

これを式変形して

$$\begin{aligned} x &= \cosh^{-1}\frac{y}{C_1} + C_2 \iff \frac{x-C_2}{C_1} = \cosh^{-1}\frac{y}{C_1} \iff \frac{y}{C_1} = \cosh\frac{x-C_2}{C_1} \\ \therefore\ y &= C_1\cosh\frac{x-C_2}{C_1} \cdots \text{（答）} \end{aligned}$$

［問題 8.5］２次元平面内の中心力場における質点（質量 m）のラグランジアンは、極座標を用いると

$$L(t,r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

と表される。$V(r)$ はポテンシャルエネルギーである。$l \equiv \partial L/\partial\dot{\theta}$ で定義される角運動量が保存されることを示せ。
解）

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

オイラーの方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

に代入すると

$$\frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} = 0$$

両辺を t について積分すると

$$\therefore\ mr^2\dot{\theta} = \text{一定}$$

ここで、$mr^2\dot{\theta} \equiv l$ とおくと $l \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}$ で定義される角運動量は時間変化にかかわらず一定なので保存される。